

# Fragen zur Diplomvorprüfung „Lineare Algebra I & II“

1. August 2004

## 1 Anmerkung

Diese Fragen stammen aus den Prüfungsprotokollen unserer Vorgänger. Sie wurden mir freundlicherweise bereits in dieser Form zur Verfügung gestellt. Danke an Ulrike!

Man beachte, dass diese Fragen von ganz unterschiedlichen Professoren gestellt wurden, die teilweise auch eine etwas andere Vorlesung gemacht haben. Deswegen sollten Fragen, die in der Vorlesung nicht vorgekommen sind, mehr oder weniger ignoriert werden. Ich habe aus Zeitgründen keine Korrektur der Liste vorgenommen. Wenn ihr euch nicht sicher seid, was gemeint ist, könnt ihr gerne mit mir Kontakt aufnehmen (Emailadresse fürs Feedback auf der Seite).

Sonst würde ich behaupten, dass man nach der Auseinandersetzung mit diesen Fragen bei der Prüfung ziemlich fit wäre.

Ervand.

## 2 Fragen

Wiederholungen nicht ausgeschlossen!

- 1) Wie sieht ein lineares Gleichungssystem aus?
- 2) Wie kann man es lösen?
- 3) Wann ist es lösbar?
- 4) Was ist der Rang einer Matrix?
- 5) Was ist die Dimension eines Unterraums?
- 6) Was ist eine Basis?
- 7) Was ist eine lineare Abbildung?
- 8) Was ist ein Eigenvektor?
- 9) Hat jede Matrix einen Eigenvektor?
- 10) Schreiben sie die Drehmatrix hin!
- 11) Gibt es noch andere orthogonale Matrizen(2x2)?
- 12) Was sind orthogonale Matrizen?
- 13) Was kann man über ihre Bilder sagen?
- 14) Wie bestimmt man die Eigenwerte?
- 15) Was ist ein charakteristisches Polynom?
- 16) Was ist die Determinante?
- 17) Beweisen Sie die Regel von Sarrus!
- 18) Was sagt der Satz von Cayley-Hamilton?

- 19) Kennen sie eine Matrix, die nicht diagonalisierbar ist?
- 20) Was sagt der Satz von der Jordannormalform?
- 21) Wann heißen zwei Matrizen ähnlich?
- 22) Haben ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom?
- 23) Können Sie das beweisen?
- 24) Was ist eine Bilinearform?
- 25) Wie bestimmt man ihr Bild bei gegebener Matrix?
- 26) Haben reelle symmetrische Matrizen immer reelle Eigenwerte?
- 27) Können Sie das beweisen?
- 28) Wie heißt die Hauptachsentransformation im reellen Fall?
- 29) Können Sie das beweisen?
- 30) Beweisen Sie, dass gilt:  $\dim V = \dim(\text{Kern}) + \dim(\text{Bild})$
- 31) Wie ist das Skalarprodukt definiert?
- 32) Wie schaut die Darstellungsmatrix von Bilinearformen aus?
- 33) Wie ist das Minimalpolynom definiert?
- 34) Wie schaut die Koordinatentransformation bei hermiteschen Matrizen aus?
- 35) Was ist die Signatur?
- 36) Wie bringt man ein lineares Gleichungssystem auf Zeilen-Stufen-Form?
- 37) Wie sieht eine Matrix in Zeilen-Stufen-Form aus?
- 38) Wie löst man es jetzt?
- 39) Wie erhält man alle Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems, wenn eine Lösung bekannt ist?
- 40) Warum haben ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom?
- 41) Wie sieht die Matrix einer linearen Abbildung aus?
- 42) Was passiert mit der Determinanten, wenn man das Vielfache einer Zeile zu einer anderen dazuaddiert?
- 43) Wie berechnet man die Determinante einer 3x3 Matrix?
- 44) Wie berechnet man die Determinante einer 4x4 Matrix?
- 45) Warum ist das charakteristische Polynom gleich 0, wenn man die Eigenwert einsetzt?
- 46) Wie ändert sich eine Matrix bei Basistransformation bei Endomorphismen?
- 47) Wie heißen  $A'$  und  $A$ ?
- 48) Haben  $A$  und  $A'$  dasselbe charakteristische Polynom?
- 49) Wann sind Vektoren linear unabhängig?
- 50) Was ist eine symmetrische Matrix?
- 51) Was ist eine Diagonalmatrix?
- 52) Wie bekomme ich aus einer reellen symmetrischen Matrix eine Diagonalmatrix?
- 53) Gibt es auch Hauptachsentransformationen für andere Matrizen?
- 54) Was ist eine hermitesche Matrix?
- 55) Was ist eine normale Matrix?
- 56) Was ist Orthonormalisierung?
- 57) Woher weiß man, dass es zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor gibt?
- 58) Hat jeder Vektorraum eine Basis?
- 59) Woher wissen wir das?
- 60) Was ist ein homogenes/inhomogenes Gleichungssystem?
- 61) Was hat eine Matrix damit zu tun?
- 62) Was ist eine Koordinatentransformation?
- 63) Was sind Eigenwerte?
- 64) Warum sind die Eigenvektoren ungleich Null?
- 65) Warum sind die Eigenwerte von orthogonalen und unitären Matrizen vom Betrag 1
- 66) Warum sind die Eigenwerte von symmetrischen und hermiteschen Matrizen immer reell?

- 67) Was ist eine unitäre Matrix?
- 68) Wie diagonalisiere ich hermitesche, orthogonale, unitäre und symmetrische Matrizen?
- 69) Beweisen sie:  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- 70) Wie lautet die Leibnitz-Formel?
- 71) Wie ist die Beziehung zwischen einer Matrix A und einer Abbildung ?
- 72) Was ist ein Unterraum?
- 73) Was ist eine direkte Summe?
- 74) Was ist eine Gruppe?
- 75) Was ist ein Beispiel für eine Gruppe?
- 76) Was ist eine Bilinearform?
- 77) Was bedeutet positiv definit?
- 78) Was ist ein Vektorraum?
- 79) Was ist ein Beispiel für einen Vektorraum?
- 80) Wie schaut der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten  $a_i$  aus?
- 81) Wie schaut die Basis dieses Vektorraums aus?
- 82) Warum ist  $a_0 \dots a_n$  linear unabhängig?
- 83) Was ist die Dimension vom Vektorraum der Polynome?
- 84) Warum gibt es im  $\mathbb{R}^3$  nur 3 linear unabhängige Vektoren?
- 85) Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  im Komplexen?
- 86) Definieren Sie Äquivalenzrelationen, Äquivalenzklassen und Repräsentanten!
- 87) Was sind Nebenklassen?
- 88) Wie sind Körper definiert? Beispiel für einen Körper!
- 89) Warum ist ein Ring kein Körper?
- 90) Was ist ein affiner Unterraum?
- 91) Wie ist der Zusammenhang zwischen affinen Unterräumen und linearen Gleichungssystemen?
- 92) Was sind Eigenräume?
- 93) Was ist der Quotientenraum?
- 94) Was ist eine adjungierte Abbildung und wie wird sie dargestellt?
- 95) Welche Rechenregeln gelten für endliche Körper?
- 96) Was ist eine Linearkombination?
- 97) Wie ist der Dualraum definiert?
- 98) Was ist die Dualbasis?
- 99) Was ist eine Duale Abbildung?
- 100) Was ist ein Ring? Wie lauten die Axiome?
- 101) Warum gelten beide Distributivgesetze?
- 102) Enthält ein Ring immer multiplikativ invertierbare Elemente?
- 103) Wie heißen diese?
- 104) Was ist ein wichtiges Beispiel für einen Ring?
- 105) Was ist der Unterschied zwischen Ring und Körper?
- 106) Was ist ein Unterraum?
- 107) warum existiert immer ein Minimalpolynom?
- 108) Lässt sich jeder Isomorphismus durch die Einheitsmatrix schreiben? Warum?
- 109) Wie findet man die Matrix eines Homomorphismus?
- 110) Wann heißen Matrizen äquivalent?
- 111) Ist der  $\mathbb{R}^3$  mit normaler Addition und Vektorprodukt ein Körper?
- 112) Gibt es zu jedem Unterraum von U ein Lineares Gleichungssystem, das U als Lösungsraum hat?
- 113) Beweisen Sie, dass jeder Vektorraum eine Basis hat!
- 114) Was ist ein euklidischer Vektorraum?
- 115) Was ist ein unitärer Vektorraum?
- 116) Was ist eine orthogonale Abbildung?

- 117) Wie schaut die Adjungierte eines orthogonalen Endomorphismus aus?
- 118) Geben sie ein Beispiel an für eine nichtabelsche Gruppe!
- 119) Wenn gilt  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  und  $A \cdot B = 0$ , was kann man dann über die Determinanten von A und B sagen?
- 120) Was ergibt die Summe von Unterräumen?
- 121) Wie lautet die Formel von der Dimension von  $U$  und  $U'$ ? Beweisidee!
- 122) Gibt es Isomorphismus  $:V \rightarrow U, U \rightarrow V$ ?
- 123) Was ist  $\text{sgn}$ ?
- 124) Was ist ein Fehlstand?
- 125) Was bedeutet alternierend?
- 126) Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?
- 127) Ist die Bestimmung vom Rang mittels der Determinante möglich?
- 128) Was ist der Unterschied zwischen einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und einem euklidischen (unitären) Vektorraum?
- 129) Was kann man mit dem Skalarprodukt noch berechnen?
- 130) Was ist das Entscheidende im Beweis der Dreiecksungleichung?
- 131) Bei welchem Endomorphismus ändert sich das Skalarprodukt nicht?
- 132) Wie lautet die Matrix dieses Endomorphismus?
- 133) Wie berechnet man aus einer Basis die Orthonormalbasis?
- 134) Was sind normale Endomorphismen?
- 135) Wie interpretier ich die Lösung von Linearen Gleichungssystemen?
- 136) Wie ist die Charakterisierung eines endlich dimensionalen Vektorraums?
- 137) Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus?
- 138) Was ist die Sesquilinearform?
- 139) Wie lautet der Satz von Cauchy Schwarz? Beweis!
- 140) Wie lautet der Satz von Cayley Hamilton? Beweis!
- 141) Wie lautet der Trägheitssatz von Sylvester? Beweis!
- 142) Was ist die Norm?
- 143) Was ist Lineare Algebra?
- 144) Wie kann man herausfinden, ob  $L(V,W)$  umkehrbar ist?
- 145) Beweisen Sie die Existenz einer Isometrie bei gleicher Dimension!
- 146) Was sind Automorphismen bei einer  $2 \times 2$ -Matrix über den Körper  $0,1$
- 147) Wie kann man da alle Untergruppen finden?
- 148) Was bilden die Automorphismen?
- 149) Kann man über die Spur die Determinante berechnen?
- 150) Wie geht das für  $2 \times 2$ -Matrizen?
- 151) Wenn man alle Eigenwerte einer Abbildung kennt, kennt man dann auch die Determinante?
- 152) Beweisen Sie:  $1^*v = v$  !
- 153) Wann heißt ein Unterraum  $p$ -invariant?
- 154) Was muss für die Vektorräume  $V, W$  gelten, wenn  $f: V \rightarrow W$  linear?
- 155) Wann ist  $f$  invertierbar?
- 156) Was genau ist der Rang?
- 157) Beweisen sie den Zusammenhang zwischen Spaltenrang und Zeilenrang!
- 158) Wie ist die Transponierte Matrix/Abbildung definiert?
- 159) Welche Dimension hat der Dualraum?
- 160) Was ist eine Basis von  $V^*$  bei  $V$  endlich dimensional?
- 161) Wenn gilt  $n = 4$ , wie viele Summanden sind dann in der Leibnitz-Formel und wie viele Elemente  $A_n$ ? Warum?
- 162) Warum ist das charakteristische Polynom gleich 0, wenn ein Eigenwert 1 ist?
- 163) Was sind Permutationen?

- 164) Was ist die Symmetrische Gruppe?
- 165) Wie lautet der Fundamentalsatz?
- 166) Was sind Restklassenringe?
- 167) Was sind orthogonale Komplemente?
- 168) Beweisen Sie, dass für  $\text{Kern } f = 0$  gilt, dass  $f$  injektiv ist!
- 169) Was sind Endomorphismen?
- 170) Was sind unitäre/selbstadjungierte Endomorphismen?
- 171) Was sind Isomorphismen?
- 172) Was sind adjungierte Matrizen?
- 173) Wie lautet der Homomorphiesatz?
- 174) Wie lautet die Dimensionsformel für Faktorräume?
- 175) Was ist die Quadratische Form? Was ist die Quadrik?
- 176) Was ist die euklidische/affine Äquivalenz?
- 177) Was sind Äquivalenzklassen/Äquivalenzrelation?
- 178) Wie lautet das Minimalpolynom zur Jordanmatrix?
- 179) Was kann man über die Determinante/Spur/charakteristisches Polynom von ähnlichen Matrizen sagen? Beweis!
- 180) Wie ist die Länge eines Vektors definiert?
- 181) Was ist das Skalarprodukt, wenn die Matrix positiv definiert ist?
- 182) Was sind Kongruente Matrizen?
- 183) Besitzen alle Körperelemente multiplikativ Inverses?
- 184) Wie erhält man den Nilpotenzgrad?
- 185) Definiere die Direkte Summe von Unterräumen
- 186) Was ist Charakteristik?
- 187) Warum ist sie immer prim?
- 188) Gibt es Abbildungen mit  $\text{Kern} = \text{Bild}$ ? Wann?
- 189) Wie lautet das Hurwitz-Kriterium?
- 190) Wann ist eine Matrix invertierbar?
- 191) Was haben Matrizen und lineare Abbildungen gemeinsam?
- 192) Wie sieht die Matrix einer linearen Abbildung aus?
- 193) Hat jede Matrix Eigenwerte?
- 194) Gibt es eine reelle  $3 \times 3$  Matrix, die keine Eigenwerte besitzt?
- 195) Ändert sich das charakteristische Polynom bei Koordinatentransformation? Beweis!
- 196) Gibt es Matrizen, die immer diagonalisierbar sind?
- 197) Nennen Sie die Eigenschaften einer Determinante!
- 198) Zeigen Sie eine Anwendung für  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ !
- 199) Wie lautet die Cramersche Regel?
- 200) Wie hängen Rang und Determinante zusammen?