

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Sommersemester 2004

Sätze

Satz 1: a) Die Menge aller Bilinearformen auf einen \mathbb{K} -Vektorraum \mathbb{V} bildet wieder einen \mathbb{K} -Vektorraum.

b) Ist v_1, \dots, v_n eine Basis von \mathbb{V} , so ist jede Bilinearform φ eindeutig durch die Werte $\varphi(v_i, v_j)$, $1 \leq i, j \leq n$ festgelegt.

c) Zu jedem $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ gibt es genau eine Bilinearform $\varphi: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ mit $\varphi(v_i, v_j) = b_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$

Satz 2: Die Zuordnung $\varphi \mapsto F$ definiert einen **kanonischen Isomorphismus** von Vektorräumen.

$$\left. \begin{array}{l} \{ \text{Bilinearformen} \} \\ \{ \varphi: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K} \} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{V}^*)$$
$$\varphi \qquad \qquad \qquad \mapsto \qquad \qquad F$$

Proposition 3: Sei $\varphi: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ Bilinearform

Dann ist äquivalent:

a) φ ist nicht ausgeartet

b) für alle $0 \neq v \in \mathbb{V}$ gibt es ein $w \in \mathbb{V}$ mit $\varphi(v, w) \neq 0$

c) $\text{Rg } \varphi = \dim \mathbb{V}$

d) zu jeder Linearform $f \in \mathbb{V}^*$ gibt es ein $v \in \mathbb{V}$

$$\text{mit } f = \varphi_v$$

(d.h. $f(w) = \varphi_v(w) = \varphi(v, w) \quad \forall w \in \mathbb{V}$)

Satz 4: Sei φ eine Bilinearform auf einen Vektorraum \mathbb{V} und $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum, so dass $\varphi|_{\mathbb{U}}$ nicht ausgeartet ist.

Dann gibt es eine direkte Summenzerlegung

$$\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{U}^\perp$$

Satz 5: (Symmetrie-Zerlegung)

Sei \mathbb{K} ein Körper mit $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$

Dann lässt sich jede Bilinearform φ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum \mathbb{V} eindeutig als

$$\text{Summe } \varphi = \varphi_S + \varphi_A$$

mit einer symmetrischen Bilinearform φ_S und einer alternierenden

Bilinearform φ_A schreiben.

Satz 1 (Polarisationsformel)
Für eine symmetrische Bilinearform φ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum \mathbb{V}
(mit $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$) gilt:

$$\varphi(v, w) = \frac{1}{2}(q_\varphi(v+w) - q_\varphi(v) - q_\varphi(w))$$

für alle $v, w \in \mathbb{V}$, insbesondere ist φ durch q_φ eindeutig bestimmt.

Satz 2 (Diagonalisierung symmetrischer Bilinearformen)
Sei $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$, sei φ eine symmetrische Bilinearform auf einem \mathbb{K} -Vektorraum \mathbb{V} .
Dann gibt es eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ mit $\varphi(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$

Bezüglich dieser Basis ist die Darstellungsmatrix von φ

$$\left(\varphi(v_i, v_j) \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} q_\varphi(v_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_\varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

Satz 3 (Diagonalisierbarkeit symmetrischer Bilinearformen über \mathbb{R})
Zu jeder reellen symmetrischen Matrix S gibt es eine $A \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$
und Zahlen $r, s \geq 0$, so dass

$${}^tASA = \begin{pmatrix} 1_r & & & & \\ & -1_s & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Satz 4: (Sylvestrischer Trägheitssatz)
Sei S eine symmetrische, reelle $n \times n$ -Matrix. Die Zahlen r und s der Anzahl der $+1$ bzw. -1 Einträge der Diagonalisierung von S (gemäß Satz 3), sind unabhängig von der Diagonalisierung und eindeutig durch S bestimmt.
Man sagt: (r, s) oder $(r, s, n - r - s)$ ist die **Signatur(Index)** von S und $r - s$ der **Trägheitsindex**.

Korollar 5: Sind S_1 und S_2 symmetrische, reelle Matrizen, dann sind äquivalent:

- S_1 und S_2 haben dieselbe Signatur
- $S_1 = {}^tAS_2A$ für ein $A \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$

Satz 6: Für symmetrische, reelle $n \times n$ -Matrizen S gilt:
a) S positiv definit $\Leftrightarrow \det S_v > 0$ für $v = 1, \dots, n$
b) S negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^v \det S_v > 0$ für $v = 1, \dots, n$

Satz 1: Polarisationsformel

Sei $\varphi: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ hermitesch und $v, w \in \mathbb{V}$

$$\operatorname{Re} \varphi(v, w) = \frac{1}{2} (\varphi(v+w, v+w) - \varphi(v, v) - \varphi(w, w))$$

Satz 2: Diagonalisierung hermitescher Formen

Ist φ eine hermitesche Form auf einen endlich dimensionalen

\mathbb{C} -Vektorraum \mathbb{V} , so gibt es eine Basis v_1, \dots, v_n bzgl. welcher

$$(\varphi(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ die Darstellungsmatrix von } \varphi \text{ ist.}$$

Proposition 1:

Für $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{r+s}(\mathbb{C})$ mit $A \in M_r(\mathbb{C})$, $D \in M_s(\mathbb{C})$,

$B, {}^t C \in M(r \times s, \mathbb{C})$ sind äquivalent:

- 1) $M \in U_{r,s}$
- 2) ${}^t \bar{M} \in U_{r,s}$
- 3) ${}^t A \bar{A} - {}^t C \bar{C} = \mathbb{1}_r$, ${}^t B \bar{B} - {}^t D \bar{D} = -\mathbb{1}_s$, ${}^t A \bar{B} = {}^t C \bar{D}$

Proposition 1: Ein Orthonormalsystem ist immer linear unabhängig.

Satz 2: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ Orthonormalsystem, dann ist jeder Vektor v aus $\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ eine endliche Linearkombination der v_i der Form

$$v = \sum_{\text{endlich}} \sigma(v, v_i) v_i$$

Satz 3: Sei \mathbb{V} ein \mathbb{K} -Vektorraum mit innerem Produkt σ

Für jeden endlich-dimensionalen Untervektorraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ gilt:

$$\mathbb{V} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{U}^\perp$$

Satz 1: a) Die adjungierte Abbildung M^* einer linearen Abbildung

$M: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ ist, falls sie existiert, eindeutig bestimmt

b) Sind \mathbb{V}, \mathbb{W} endlich dimensional, so existiert zu jeder linearen Abbildung M eine Adjungierte

c) Ist M^* adjungiert zu M , so ist auch M adjungiert zu M^* , d.h. $M^{**} = M$

Satz 2: Für jeden Eigenwert λ einer linearen Abbildung $M: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ gilt:

M unitär $\Rightarrow |\lambda| = 1$

M selbstadjungiert $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

M antiselbstadjungiert $\Rightarrow \lambda$ rein imaginär

Satz 3: Hauptachsentransformation selbstadjungierter Abbildungen
Es sei \mathbb{V} ein endlich dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum mit einem inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ selbstadjungiert.
Dann existiert eine ONB v_1, \dots, v_n von \mathbb{V} aus Eigenvektoren für M .

Korollar 4: Hauptachsentransformation für hermiteschen Matrizen
Zu jeder hermiteschen Matrix $M \in M_n(\mathbb{C})$ gibt es eine unitäre Matrix $U \in M_n(\mathbb{C})$, so dass

$$U^{-1}MU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Korollar 5: Hauptachsentransformation für symmetrische Matrizen
Zu jeder symmetrischen Matrix $S \in M_n(\mathbb{R})$, gibt es eine orthogonale Matrix $O \in O_n(\mathbb{R})$, so dass

$$O^{-1}MO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Lemma 1: $\mathcal{A} := w + \mathbb{U} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = c\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = c_i, i = 1, \dots, r\}$
 $= \bigcap_{i=1}^r \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = c_i\}$

Lemma 2: Sei $\mathcal{A} = w + \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum. Dann ist
 $\mathcal{A} - a = \mathbb{U} \quad \forall a \in \mathcal{A}$
Insbesondere ist \mathbb{U} eindeutig bestimmt.

Korollar 3: Für $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = c\}$ gilt:
 $\dim \mathcal{A} = n - \text{Rg } A$

Proposition 4: Die Affine Hülle A einer Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ ist ein affiner Unterraum.

Korollar 5: Für eine nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:
a) A ist affiner Unterraum
b) Für $v, w \in A$ liegt auch die Gerade durch v und w in A
c) Für $v_0, \dots, v_r \in A$ liegt auch jede Affinkombination von v_0, \dots, v_r in A

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Sommersemester 2004

Sätze

Proposition 6: Sei A die affine Hülle von w_0, w_1, \dots, w_r . Dann sind äquivalent:

- w_0, w_1, \dots, w_r sind affin unabhängig
- Für jedes $w = \sum_{i=0}^r \beta_i w_i \in A$ sind die Koeffizienten $\beta_0, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$ (mit $\beta_0 + \dots + \beta_r = 1$) eindeutig bestimmt

Satz 1: Für eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- K ist konvex
- Für endlich viele Punkte von K ist auch jede Konvexkombination dieser Punkte in K
- $K = \text{conv}(K)$

Lemma 2: Seien H_1, \dots, H_k affine Hyperebenen in \mathbb{R}^n

(also $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle = b_i\}$ mit $a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}$)

Ist $M \subset H_i$ für $i = 1, \dots, k$, so ist $M \subset \bigcap_{i=1}^k H_i$

Proposition 1: Abgeschlossene und offene Halbebenen sind konvex.

Korollar 2: Ein Polyeder ist konvex.

Proposition 3: Der Durchschnitt einer Polyeders mit einem affinem Unterraum ist wieder ein (durchschnittener) Polyeder.

Satz 4: Der Simplex $S = \text{conv}(p_0, \dots, p_k)$ ist ein Polyeder der Dimension k .

Satz 5: Sei $P = \bigcap_{i=1}^k \{\langle a_i, x \rangle \geq b_i\} \subset \mathbb{R}^n$

Dann sind äquivalent:

- $\dim P = n$
- $\bigcap_{i=1}^k \{\langle a_i, x \rangle > b_i\} \neq \emptyset$

Satz 6: Sei $P = \bigcap_{i=1}^k \{\langle a_i, x \rangle > b_i\} \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionales Polyeder.

Ist die Dimension der Seite $S = P \cap \{\langle a_{i_0}, x \rangle = b_{i_0}\} < n - 1$,

so gilt schon $P = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k \{\langle a_i, x \rangle \geq b_i\}$

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Sommersemester 2004

Sätze

Satz 6: Sei $P = \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle > b_i \} \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionales Polyeder.

Ist die Dimension der Seite $S = P \cap \{ \langle a_{i_0}, x \rangle = b_{i_0} \} < n-1$, so gilt:

$$P = \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \}$$

Satz 7: Sei $P = \bigcap_{i=1}^r \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und $S = P \cap \bigcap_{j=1}^s \{ \langle a_j, x \rangle = b_j \}$

(mit $\{i_1, \dots, i_j\} \subset \{1, \dots, r\}$) eine Seite. Dann gilt:

$$\dim S = n - \operatorname{Rg}(a_{i_1}, \dots, a_{i_s})$$

Satz 8: Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^n$ affine Hyperebenen und q eine Ecke von $Q = P \cap H$.
Dann ist q entweder Ecke von P oder
Durchschnitt von H mit einer Kante von P .

Satz 9: Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein n -dimensionales Polyeder.

- wenn $P \neq \mathbb{R}^n$, so besitzt P Seiten der Dimension $n-1$
- Jede d -dimensionale Seite von P ist schon Seite einer $(d+1)$ -dimensionalen Seite von P .
- Jede $(n-2)$ -dimensionale Seite gehört zu genau 2 $(n-1)$ -dimensionale Seiten.

Satz 10: Für ein Polyeder $P = \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in P$ sind äquivalent:

- p ist Ecke von P
- Es gibt $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, so dass a_{i_1}, \dots, a_{i_n} linear unabhängig sind
und $\{p\} = \bigcap_{j=1}^n \{ \langle a_{i_j}, x \rangle = b_{i_j} \}$
- Es gibt einen Halbraum $\{ \langle a, x \rangle \leq b \}$, der P nur in p schneidet
- Sind $q_0 \neq q_1$ Punkte in P und $p = (tq_0 + (1-t)q_1) \in [q_0, q_1]$, dann gilt:
 $t = 0$ oder $t = 1$, d.h. $p = q_0$ oder $p = q_1$

Korollar 11: Jedes Polyeder hat nur endlich viele Ecken.

Satz 12: Sei $\emptyset \neq P = \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder. Dann sind äquivalent:

- $\operatorname{Rg}\{a_1, \dots, a_k\} = n$
- P besitzt Seiten jeder Dimension $d < \dim P$

Satz 1: Für ein Polyeder $P = \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \neq \emptyset$, $P \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- P ist unbeschränkt
- Es gibt ein $p \in P$ und einen Strahl an p , der ganz in P liegt
- Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle a_i, v \rangle > 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$
- An jedem Punkt $p \in P$ gibt es einen Strahl, der ganz in P liegt

Satz 2: Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und $H = \{ \langle a, x \rangle = b \}$ eine Hyperebene.
 Wenn $P \cap H \neq \emptyset$ beschränkt, so sind auch die dazu parallele Schritte
 $P_c = P \cap \{ \langle a, x \rangle = c \mid c \in \mathbb{R} \}$
 beschränkt (möglicherweise leer).

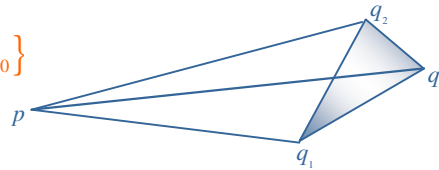
Satz 3:

- Jedes beschränkte Polyeder der Dimension n hat mindestens $n+1$ Seiten der Dimension $n-1$
- Jedes beschränkte Polyeder hat Ecken

Satz 4: Ein beschränktes Polyeder ist die konvexe Hülle seiner Ecken.

Kegel: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^n$
 Der Kegel über M mit Spitze p ist die Vereinigung aller Strahlen an p durch Punkte von M .

$$\text{cone}_p(M) = \bigcup_{q \in M} \{ p + t(q - p) \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \}$$



Satz 5: Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ gilt:
 Der Kegel über konvexen Hüllen von M mit Spitze p ist gleich der konvexen Hülle des Kegels über M mit Spitze p .

$$\text{cone}_p(\text{conv}(M)) = \text{conv}(\text{cone}_p(M))$$

Satz 6: $P \subset \text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^k S_i \right)$

Satz 7: Satz 6 gilt auch für unbeschränkte Polyeder, $\dim \geq 1$.

Satz 1: Sei $\emptyset \neq P \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Polyeder und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ linear.
 Dann gibt es eine Ecke $p \in P$, in dem f das Maximum seiner Werte (in P) annimmt:

$$f(x) \leq f(p) \quad \forall x \in P$$

Satz 2: Sei $P = \bigcap_{i=1}^k \{ \langle a_i, x \rangle \geq b_i \} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und

$\{p\} = \bigcap_{i=1}^n \{ \langle a_i, x \rangle = b_i \}$ ($n \leq k$) eine Ecke von P .

Für Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \leq 0$ ist p optimal für die Linearform

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle a_i, x \rangle$$

Satz 3: Es sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder, $p \in P$ eine Ecke und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Linearform. Ist p nicht optimal für f , so gibt es eine Kante K an p , so dass

$$f(p) < f(q) \quad \forall q \in K \setminus p$$

Satz 4: (Hauptsatz der linearen Optimierung)

Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder mit einer Ecke p und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear.

Nimmt f auf P sein Maximum an, dann tut es das auch in einer Ecke von P .

Anderenfalls ist P unbeschränkt und es gibt eine unbeschränkte Kante (Strahl)

Von P auf dem $f \rightarrow \infty$ strebt.

Satz 5: Sei $0 \neq P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder. Dann sind äquivalent:

a) P besitzt eine Ecke

b) Es gibt eine Affinität $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(P) = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit $b \geq 0$

c) Es gibt eine Affinität $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $F(P) = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$

Satz 6: Nimmt eine Linearform f auf dem Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$

mit $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ ihr Maximum an und ist $m < n$, so wird das Maximum

schon in einer Ecke $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in P$, $\#\{p_r \neq 0\} \leq m$ angenommen.

Satz 1: Für $p \in \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

a) p ist eine Ecke von $P = \{1 \mid Ax = b, x \geq 0\}$

b) p ist zulässige Basislösung