§1 Das Riemann-Integral auf Quadern im $\mathbb{R}^n$

Def. 1

(a) $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \;\; a_i \leq b_i \;\forall i$
$Q = Q(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \;\forall i\}$ (abg.) Quader im $\mathbb{R}^n$.
$\mathring{Q} = \mathring{Q}(a, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i \;\forall i\}$ (offener) Quader im $\mathbb{R}^n$.

(b) Eine Menge P=$\{Q_1, \ldots, Q_m\}$ von Quadern im $\mathbb{R}^n$ heißt Partition des Quaders Q, wenn gilt:

- $Q = \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$
- $\mathring{Q}_i \cap \mathring{Q}_j = \emptyset \;\forall i \neq j$

(c) Eine Partition $P' = \{Q'_1, \ldots, Q'_l\}$ von Q heißt Verfeinerung von P, wenn gilt:
Für jedes $Q'_\nu \in P' \;\exists\, Q\mu \in P$ mit $Q'_\nu \subset Q\mu$

(d) Sei $\delta(Q_k)$ der Durchmesser von Q_k, so heißt

$$\varphi(P) := \max_{1 \leq k \leq m} \delta(Q_k)$$

Die Feinheit der Partition P von Q.
Es gilt: Ist P' Verfeinerung von P, so ist $\varphi(P') \leq \varphi(P)$.

Sei $Q = Q(a, b)$ Quader.
Volumen von Q: $\mu(Q) := \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$
Es gilt: Ist $P = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ eine Partition von Q, so ist:

$$\mu(Q) = \sum_{i=1}^{m} \mu(Q_i)$$

Def. 2

Sei Q Quader in $\mathbb{R}^n$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Sei $P = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ Partition von Q.

Untersumme von f bzgl. P:

$$\underline{S}_P(f) := \sum_{i=1}^{m} \inf_{x \in Q_i} f(x)\, \mu(Q_i)$$

Obersumme von f bzgl. P:

$$\overline{S}_P(f) := \sum_{i=1}^{m} \sup_{x \in Q_i} f(x)\, \mu(Q_i)$$

Es gilt: $\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f)$

Lemma 1

Sei P' Verfeinerung von P $\Rightarrow$

$$\overline{S}_{P'}(f) \leq \overline{S}_P(f) \tag{1}$$

$$\underline{S}_{P'}(f) \geq \underline{S}_P(f) \tag{2}$$

Beweis : klar.

$\square$

Korollar 1

Für je zwei Partitionen P_1 und P_2 von Q gilt: $\underline{S}_{P_1}(f) \leq \overline{S}_{P_2}(f)$.
Beweis : Sei P_3 eine gemeinsame Verfeinerung von P_1 und P_2 $\Rightarrow$

$$\underline{S}_{P_2}(f) \leq \underline{S}_{P_3}(f) \text{ (Nach Lemma 1)}$$
$$\underline{S}_{P_3}(f) \leq \overline{S}_{P_3}(f) \text{ (offensichtlich)}$$
$$\overline{S}_{P_3}(f) \leq \overline{S}_{P_1}(f) \text{ (Nach Lemma 1)}$$
$$\Rightarrow \underline{S}_{P_2}(f) \leq \overline{S}_{P_1}(f)$$

$\square$

Def. 3

Sei Q abg. Quader im $\mathbb{R}^n$, $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt.

Unteres Riemann-Intagral von f: $\int\limits_Q {}_* f(x)dx := \sup\limits_{P=Part.\,von\,Q} \underline{S}_P(f) \in \mathbb{R}$
Oberes Riemann-Intagral von f: $\int\limits_Q {}^* f(x)dx := \inf\limits_{P=Part.\,von\,Q} \overline{S}_P(f) \in \mathbb{R}$

Aus Korollar 1 folgt:

Korollar 2

$$\int\limits_Q {}_* f(x)dx \leq \int\limits_Q {}^* f(x)dx$$

Def. 4

$f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar $:\Leftrightarrow \int\limits_Q {}_* f(x)dx = \int\limits_Q {}^* f(x)dx$

Lemma 2

Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Äquivalent sind:

(1) f intbar

(2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, s.d. $\forall$ Partitionen P der Feinheit $\varphi(P) \leq \delta$ gilt:

$$\left| \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \right| \leq \varepsilon$$

Beweis : folgt sofort aus der Def. von inf und sup.

□

Satz 1

Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f intbar auf Q.

<u>Beweis</u> : Q kompakt $\Rightarrow$ f glm. stetig aug Q
D.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, s.d. $\forall x, x' \in Q$ mit $\underbrace{\|x - x'\|}_{eukl.\,Norm} \leq \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{\mu(Q)}$$

Sei $P = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ Partition von Q der Feinheit $\varphi(P) \leq \delta$.

$0 \leq \int\limits_Q^* f(x)dx - \int\limits_{Q*} f(x)dx \leq \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = \sum\limits_{i=1}^m \sup\limits_{x \in Q_i} f(x)\, \mu(Q_i) - \sum\limits_{i=1}^m \inf\limits_{x \in Q_i} f(x) \cdot$
$\cdot \mu(Q_i) = \sum\limits_{i=1}^m \left| \max\limits_{x \in Q_i} f(x) - \min\limits_{x \in Q_i} f(x) \right| \mu(Q_i) \leq \sum\limits_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{\mu(Q)} \mu(Q_i) = \frac{\varepsilon}{\mu(Q)} \mu(Q) = \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Beh. (Da gilt $\forall \varepsilon > 0$)

$\square$

<u>Lemma 3</u>

Sei $c \in \mathbb{R}$ Konstante $\Rightarrow \int\limits_Q c\, dx = c \cdot \mu(Q)$.
Insbesondere $\int\limits_Q dx = \mu(Q)$
<u>Beweis</u> : Sei $P = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ Partition.
$\int\limits_Q c\, dx = \overline{S}_P(f) = \sum\limits_{i=k}^m c \cdot \mu(Q_k) = c \cdot \mu(Q)$.

$\square$

<u>Def. 5</u>

Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, $P = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ Partition.
$\xi_k \in Q_k$ für $k = 1, \ldots, m$ Stützstelle.
Dann heißt

$$S_P(f, \underline{\xi}) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \cdot \mu(Q_k)$$

Riemannsche Summe von f bzgl. P.
Es gilt: $\underline{S}_P(f) \leq S_P(f, \underline{\xi}) \leq \overline{S}_P(f)$

Satz 2

Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ intbar. Dann gilt:
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, s.d. $\forall$ Partitionen P der Feinheit $\leq \delta$ gilt:

$$\left| \int\limits_Q f(x)dx - S_P(f, \underline{\xi}) \right| \leq \varepsilon$$

für jede Wahl von Stützstellen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$
Beweis : wie in Analysis I

$\square$

Satz 3 (Satz über iterierte Integration)

Sei $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.
Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ intbar.
Ann. Für jedes feste $y \in [c; d]$ existiere

$$F(y) := \int\limits_a^b f(x, y)dx$$

$\Rightarrow\ \exists \int\limits_c^d F(y)dy$ und es gilt:

$$\int\limits_Q f(x, y)d(x, y) = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

Beweis :
Sei $P_x = \{x_0, \dots, x_m\}$ Partition von $[a; b]$
Sei $P_y = \{y_0, \dots, y_l\}$ Partition von $[c; d]$
P_x und P_y erzeugen Partition P:

$$P = \{Q_{ij} | i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, l\}$$

$$Q_{ij} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x_{i-1} \leq x \leq x_i; y_{i-1} \leq y \leq y_i\right\}$$

$\forall \xi_i \in [y_{i-1}; y_i]$ sei $S_{P_y}(F, \underline{\xi}) = \sum_{j=1}^{l} F(\xi_j)(y_j - y_{j-1})$
Es gilt $\forall x \in [x_{i-1}; x_i]$:

$$\inf_{Q_{ij}} f(x,y) \leq f(x,\xi_i) \leq \sup_{Q_{ij}} f(x,y)$$

Integrieren über $[x_i; x_{i-1}]$ liefert:

$$\begin{array}{ccccc}
\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \inf f(x,y)dx & \leq & \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\xi_j)dx & \leq & \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sup f(x,y)dx \\
|| \longleftarrow & & \text{Lemma 3} & & \longrightarrow || \\
\inf\limits_{Q_{ij}} f(x,y)(x_i - x_{i-1}) & \leq & \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\xi_j)dx & \leq & \sup\limits_{Q_{ij}} f(x,y)(x_i - x_{i-1})
\end{array}$$

Multiplikation mit $d_j = y_j - y_{j-1}$ und Summieren über i und j liefert:

$$\begin{array}{ccccc}
\sum\limits_{i,j} \inf\limits_{Q_{ij}} f(x,y)(x_i - x_{i-1})d_j & \leq & \sum\limits_{i,j} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,\xi_j)dx \cdot d_j & \leq & \sum\limits_{i,j} \sup\limits_{Q_{ij}} f(x,y)(x_i - x_{i-1})d_j \\
|| & & || & & || \\
\sum\limits_{i,j} \inf\limits_{Q_{ij}} f(x,y)\mu(Q_j) & & \sum\limits_{j=1}^{l} \int\limits_{a}^{b} f(x,\xi_j)dx(y_j - y_{j-1}) & & \sum\limits_{i,j} \sup\limits_{Q_{ij}} f(x,y)\mu(Q_j) \\
|| & & || & & || \\
\underline{S}_P(f) & & \sum\limits_{j=1}^{l} F(\xi_j)(y_j - y_{j-1}) & & \overline{S}_P(f) \\
& & || & & \\
& & S_{P_y}(F, \underline{\xi}) & &
\end{array}$$

Also: $\underline{S}_P(f) \leq S_{P_y}(F, \underline{\xi}) \leq \overline{S}_P(f)\ \forall \underline{\xi}$

$$\Rightarrow \underline{S}_P(f) \leq \underline{S}_{P_y}(F) \leq \overline{S}_P(f)\ (*)$$

$\overline{S}_{P_y}(F) - \underline{S}_{P_y}(F) \leq \Rightarrow \underline{S}_P(f) - \overline{S}_P(f) \underbrace{\leq}_{f\ intbar} \varepsilon$

$\int\limits_{c}^{d}{}^{*} F(y)dy - \int\limits_{c}^{d}{}_{*} F(y)dy = \inf\limits_{P_y} \overline{S}_{P_y}(F) - \sup\limits_{P_y} \underline{S}_{P_y}(F) \leq \varepsilon$
$\Rightarrow$ F ist intbar.

Weiter folgt aus $(*)$:

$$\int\limits_{Q} f(x,y)d(x,y) \leq \int\limits_{c}^{d} F(y)dy \leq \int\limits_{Q} f(x,y)d(x,y)$$

$\square$