§8 Das Lebesgues Integral im $\mathbb{R}^n$

Sei Q $\subset \mathbb{R}^n$ ein (beschränkter) Quader, d.h. $Q = I_1 \times \ldots \times I_n$, wo $I_\nu \subset \mathbb{R}$ Intervalle

Definition 1

$\varphi : Q \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion auf Q $:\Leftrightarrow \exists$ Partition Q $= \bigcup\limits_{i=1}^{n} Q_i$ von Q, s.d.

$$f \,|\, \overset{\circ}{Q}_i = const =: c_i$$

<u>Gilt</u>: Jede Treppenfunktion ist R(iemann)-integrierbar und es gilt:

$$\int\limits_Q \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_i \mu(Q_i)$$

Definition 2

Eine Treppenfunktion $\varphi : Q \to \mathbb{R}$ auf einem unbeschränkten Quader Q ist eine Funktion, für die $\exists$ beschränkter Teilquader $\widetilde{Q} \subset Q$, so dass gilt:

(1) $f \,|\, \widetilde{Q}$ ist Treppenfunktion (im obigen Sinne)

(2) $f \,|\, Q \setminus \widetilde{Q} \equiv 0$

Für solche φ definiere $\int\limits_Q \varphi(x)dx := \int\limits_{\widetilde{Q}} \varphi(x)dx$

Im Folgenden sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ beliebiger Quader (z.B. $Q = \mathbb{R}^n$)

Sei $\mathcal{T}(Q) :=$ $\mathbb{R}$-VR der Treppenfunktionen auf Q.

Definition 3

Wie in Analysis II §12 sei definiert:
$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Nullmenge $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ höchstens abzählbar viele Quader Q_ν, s.d.:

(1) $M \subset \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} Q_\nu$

(2) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mu(Q_\nu) < \varepsilon$

Fast überall $:\Leftrightarrow$ bis auf eine Nullmenge
Genau wie in Analysis II §12 gilt :

Satz 1 Lebesguesches Integrabilitätskriterium

f = R-intbar auf Q $\Leftrightarrow$

(i) f ist beschränkt auf Q

(ii) f ist fast überall stetig auf Q (d.h. stetig bis auf höchstens eine Nullmenge)

Wie in Analysis II §13 sei

Definition 4

$$\mathcal{L}^+(Q) := \left\{ \begin{array}{l} f : Q \to \mathbb{R} \mid \exists \text{ monoton} \nearrow \text{ Folge } (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ von Treppenfunktionen mit :} \\ \qquad 1.\ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) \overset{\exists}{=} f(x) \text{ fast überall} \\ \qquad 2.\ \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_Q \varphi_n(x)dx \ \exists \end{array} \right\}$$

Definition 5

$\mathcal{L}(Q) := \{f = g - h \ \text{ f.ü.} \mid g, h \in \mathcal{L}^+(Q)\} = \mathbb{R}\text{-VR}$

Definition 6 Lebesguesintegral

Sei $f \in \mathcal{L}(Q)$ etwa$f = g - h$ f.ü.
$g = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n \in \mathcal{L}^+(Q)$
$h = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n \in \mathcal{L}^+(Q)$
Dann heißt

$$\int\limits_Q f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int\limits_Q \varphi_n(x)dx - \lim_{n\to\infty} \int\limits_Q \psi_n(x)dx$$

Das Lebesgues-Integral von f.

Wie in Analysis II §13 zeigt man (fast wörtlich):

(1) $\int\limits_Q f(x)dx$ ist wohldefiniert

(2) f ist R-intbar auf Q $\Rightarrow$ f ist L-intbar auf Q (gilt nur auf kompaktem Träger) und

$$\text{R - Integral} = \text{L - Integral}$$

(3) $\mathcal{L}(Q)$ ist $\mathbb{R}$-VR und $\int\limits_Q \bullet \, dx : \mathcal{L}(Q) \to \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$-linear und ordnungserhaltend, d.h.

$$f_1(x) < f_2(x) \Rightarrow \int\limits_Q f_1(x)dx < \int\limits_Q f_2(x)dx$$

(4) **Satz 2** Konvergenzsatz von Levi

Sei (f_n) monoton $\nearrow$ Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{L}(Q)$
mit beschränkter Integralfolge $(\int\limits_Q f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \exists\ f \in \mathcal{L}(Q)$ mit:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{\exists}{=} f$ f.ü.
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_Q f_n dx = \int\limits_Q f(x)dx$

(5) **Satz 3** Konvergenzsatz von Lesbegues

Sei $f_n \in \mathcal{L}(Q)\ \forall n \in \mathbb{N}$

Angenommen:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \overset{\exists}{=} f$ f.ü.

(2) $|f_n| \le g \in \mathcal{L}(Q)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}(Q)$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_Q f_n(x)dx = \int\limits_Q \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int\limits_Q f(x)dx$$

Beweise wie in Analysis II. Auch Folgerungen gelten unverändert.

Satz 4 Satz von Fubini für L-Integrale

Sei Q_1 = p-dim. Quader, Q_2 = q-dim. Quader

$Q := Q_1 \times Q_2$

Sei $f \in \mathcal{L}(Q)$

$\Rightarrow$ Die Funktion $g : \begin{cases} Q_2 \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \int\limits_{Q_1} f(x,y)\ dx \end{cases}$ existiert f.ü.

Setzt man g irgendwie fort auf Q_2, so ist $g \in \mathcal{L}(Q_2)$ und es gilt:

$$\int\limits_Q f(x,y)d(x,y) = \int\limits_{Q_2} g(y)\ dy \Big(= \int\limits_{Q_2} (\int\limits_{Q_1} f(x,y)\ dx)dy \Big)$$

Um den Satz von Fubini für L-Integrale zu beweisen, müssen zuerst zwei Lemmata bewiesen werden. Der Beweis wird der Einfachheit halber für p=q=1 durchgeführt, d. h. n=p+q=2. Der allgemeine Beweis verläuft analog.

Aus $p = q = 1 \Rightarrow\ Q_1 = I_1$ und $Q_2 = I_2$ sind Intervalle.

Lemma 1

Sei $\varphi \in \mathcal{T}(Q)$ und $Q = I_1 \times I_2$
$\Rightarrow \int\limits_Q \varphi(x,y)\ d(x,y)\ = \int\limits_{I_2}(\int\limits_{I_1} \varphi(x,y)\ dx)dy$
Beweis :
Treppenfunktionen sind R-intbar.
Damit folgt das Lemma aus dem Satz über iterierte Integration.

Lemma 2

Sei $N \subset \mathbb{R}^2$ Nullmenge. Dann ist für fast alle $y \in \mathbb{R}$ die Menge :

$$N(y)\ = \{y \mid (x,y)\ \in N\}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}$

Beweis :

Sei $Q = \mathbb{R}^2$. Nach einer Folgerung analog zu Satz aus Analysis II (wörtlich aus der Vorlesung) $\exists$ momoton $\nearrow$ Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{T}(\mathbb{R}^2)$ mit beschränkter Integralfolge $\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_n(x,y)\ d(x,y)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $(\varphi_n(x,y)\ )_{n\in\mathbb{N}}$ divergent $\forall (x,y) \in N$

Sei $y \in \mathbb{R}^2$ fest. Die Folge von Funktionen

$$\psi_n(y)\ := \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n(x,y)\ dx$$

ist monoton wachsend.

Ihre Integralfolge $\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n(y)\ dy\right)$ ist beschränkt, denn nach Lemma 1 ist

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n(y)\ dy\right)_{n\in\mathbb{N}} = \int\limits_{\mathbb{R}}(\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n(x,y)\ dx)dy \overset{L1}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi_n(x,y)(x,y)$$

Satz von Levi $\Rightarrow (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert f. ü. auf $\mathbb{R}$.

Sei $y_0 \in \mathbb{R}$, so dass $(\psi_n(y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
Satz von Levi $\Rightarrow$ $(\varphi_n(x, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert höchstens auf einer Nullmenge.
Aber $(\varphi_n(x, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert auf $N(y_0)$

$\Rightarrow N(y_0)$ ist Nullmenge in $\mathbb{R}$

Beweis (Satz von Fubini) :

O.B.d.A. $f \in \mathcal{L}^+(Q)$
(denn ist der Satz für $\mathcal{L}^+(Q)$ bewiesen und $g \in \mathcal{L}$, so ist $g = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+(Q)$
$\Rightarrow \int\limits_Q g\ d(x,y) = \int\limits_Q f_1 d(x,y) - \int\limits_Q f_2 d(x,y) = \int\limits_{Q_1}\int\limits_{Q_2} f_1 dxdy - \int\limits_{Q_1}\int\limits_{Q_2} f_2 dxdy = \int\limits_{Q_1}\int\limits_{Q_2} g\ dxdy$)

Aus der Definition für L-Integrale $\Rightarrow \exists$ monoton $\nearrow$ Folge$(\varphi_n) \in \mathcal{T}(Q)$ mit

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ f. ü.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_Q \varphi_n d(x,y) = \int\limits_Q f\ d(x,y)$ (1)

Sei $\psi_n(y) := \int\limits_{Q_1} \varphi_n(x,y)\ dx$. Die Folge (ψ_n) ist monoton $\nearrow$
Lemma 1 $\Rightarrow \int\limits_{Q_2} \psi_n(y)\ dy = \int\limits_Q \varphi_n(x,y)\ d(x,y)$ (2)
$\Rightarrow$ Die Integralfolge $\left(\int\limits_{Q_2} \psi_n(y)\ dy\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist also beschränkt.
Satz von Levi $\Rightarrow (\psi_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert f. ü. auf Q_2

$N := \{(x,y) \in Q \mid (\varphi_n(x,y))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent$\}$ ist Nullmenge

Lemma 2 $\Rightarrow$ für fast alle $y \in Q_2$ ist $N(y) = \{x \mid (x,y) \in N\}$ eine Nullmenge in Q_1.

Sei $y_0 \in Q_2$, so dass gilt: $N(y_0)$ ist Nullmenge und $(\psi_n(y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Dann $\exists$ Nullmenge $N_0 \subset Q_2$, so dass $\forall y_0 \in Q_2 \setminus N_0$ das eben gesagte gilt.
$\Rightarrow (\varphi_n(x, y_0))$ konvergiert von unten gegen $f(x, y_0)$ $\forall x \in Q_1 \setminus N(y_0)$

Nach Def. des L - Integrals über $Q_1 \Rightarrow$

$$\int\limits_{Q_1} f(x,y_0)dx \overset{\exists}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{Q_1} \varphi_n(x,y_0)dx = \lim_{n\to\infty} \psi_n(y_0)$$

$$\text{Setze } g(y) \ := \begin{cases} \int\limits_{Q_1} f(x,y)\ dx = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(y) & \forall y \in Q_2 \setminus N_0 \\ 0 & \forall y \in N_0 \end{cases} \tag{3}$$

Wir haben bewiesen:
Die Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend mit $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(y) \ = g(y)$ f.ü. und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{Q_2} \psi_n(y)\ dy \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{Q} \varphi_n(x,y)\ d(x,y) \ \overset{(1)}{=} \int\limits_{Q} f(x,y)\ d(x,y) \ (4)$$

Satz von Levi $\Rightarrow g \in \mathcal{L}(Q_2)$ und es gilt:

$$\int\limits_{Q_2}\int\limits_{Q_1} f(x,y)\ dxdy \overset{(3)}{=} \int\limits_{Q_2} g(y)\ dy \overset{(4)}{=} \int\limits_{Q} f(x,y)\ d(x,y)$$