

§9 Das Lebesgue-Maß

Sei X eine Menge (später: $X = \mathbb{R}^n$). Dann ist

$$\mathcal{P}(X) := \{M \mid M \subseteq X\}$$

die Potenzmenge von X .

Definition: $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ heißt σ -Algebra $:\Leftrightarrow$

- (1) $X \in \Sigma$
- (2) $M \in \Sigma \Leftrightarrow X \setminus M \in \Sigma$
- (3) $M_i \in \Sigma \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i \in \Sigma$

Lemma 9.1: Sei $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra. Dann gilt:

- (1) $\emptyset \in \Sigma$.
- (2) $M_i \in \Sigma \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i \in \Sigma$.

Beweis:

- (1) $\emptyset = X \setminus X \in \Sigma$.
- (2) $N_i := X \setminus M_i \in \Sigma$ nach 2.
 $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \in \Sigma$
 $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i \in \Sigma$.

Lemma 9.2: Seien $\{\Sigma_\alpha \mid \alpha \in I\}$ σ -Algebren von X . Dann ist $\bigcap_{\alpha \in I} \Sigma_\alpha$ ebenfalls eine σ -Algebra.

Beweis: Klar.

Korollar: Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Teilmengen. $\Rightarrow \exists$ eindeutig bestimmte kleinste σ -Algebra $\overline{\mathcal{F}}$ mit $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$. $\overline{\mathcal{F}}$ heißt die von \mathcal{F} erzeugte σ -Algebra.

Beweis: $\mathcal{P}(X)$ ist σ -Algebra mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Die Behauptung folgt dann aus Lemma 9.2, da $\mathcal{F} \subset \bigcap \{\text{gewisse Elemente aus } \mathcal{P}\}$.

Beispiel: $\mathcal{F} = \{\text{offene Teilmengen von } \mathbb{R}^n\}$

$$B := \overline{\mathcal{F}} = \sigma\text{-Algebra der BOREL-Mengen von } \mathbb{R}^n.$$

Definition: Ein Maß auf einer σ -Algebra Σ ist eine Funktion

$$\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\},$$

so dass gilt:

$$(1) \mu(\emptyset) = 0.$$

$$(2) \mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_{\nu}).$$

für paarweise disjunkte $A_{\nu} \in \Sigma$.

Lemma 9.3: Sei μ ein Maß auf Σ , $A, B, A_i \in \Sigma$.

$$(1) A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

$$(2) \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

$$(3) \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Beweis:

$$(1) B = A \dot{\cup} (B \setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$$

$$\begin{aligned} (2) A \cup B &= (A \cap B) \dot{\cup} (B \setminus (A \cap B)) \dot{\cup} (A \setminus (A \cap B)) \\ &\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus (A \cap B)) + \mu(A \setminus (A \cap B)) \\ &\Rightarrow \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \setminus (A \cap B)) + 2\mu(A \cap B) + \mu(B \setminus (A \cap B)) \\ &= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \end{aligned}$$

(3) Folgt induktiv.

Ziel ist es nun, zu zeigen, dass das LEBESGUE-Integral ein Maß auf der σ -Algebra der BOREL-Mengen von \mathbb{R}^n ist.

$f \in \mathcal{L}(Q) \Rightarrow f = f_1 - f_2: \exists$ monoton steigende Folgen $\varphi_n, \psi_n \in \mathcal{T}(Q)$ mit

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = f_1, \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = f_2 \text{ f.ü.}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \varphi \, dx =: \int_Q f_1 \, dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q \psi \, dx =: \int_Q f_2 \, dx$$

Es folgt: $f \in \mathcal{L}(Q) \Rightarrow \exists$ Folge $g_n \in \mathcal{T}(Q)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f$ f.ü.

(Vorsicht: Die Umkehrung gilt i. A. nicht!)

Definition: $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt messbar $:\Leftrightarrow \exists$ Folge $\varphi_n \in \mathcal{T}(Q)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = f \text{ f.ü.}$$

Der \mathbb{R} -Vektorraum der messbaren Funktionen auf Q heißt $\mathcal{M}(Q)$.

Satz 9.3: $\mathcal{L}(Q) \subseteq \mathcal{M}(Q)$.

Beweis: Siehe oben.

Satz 9.4:

$$(1) f \in \mathcal{M}(Q), |f| \leq g \in \mathcal{L}(Q) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(Q)$$

$$(2) f, g \in \mathcal{M}(Q) \Rightarrow \begin{cases} f \pm g \in \mathcal{M}(Q) \\ f \cdot g \in \mathcal{M}(Q) \\ \max(f, g) \in \mathcal{M}(Q) \\ |f| \in \mathcal{M}(Q) \end{cases}$$

Außerdem, falls $f \neq 0$ f.ü. ist: $g \in \mathcal{M}(Q)$ mit

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{falls } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Wörtlich wie in Analysis II §14.

Definition: Für $p \in \mathbb{R}, p \geq 1, f \in \mathcal{M}(Q)$ definiere die p -Norm von f durch

$$\|f\|_p = \left(\int_Q |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Def. $\mathcal{L}^p(Q) := \{f \in \mathcal{M}(Q) \mid |f|^p \in \mathcal{L}(Q)\}$.

Satz 9.5: $\mathcal{L}^p(Q)$ ist ein BANACHraum.

Beweis: Wie in Analysis II §14.

Genauer: $\mathcal{L}^p(Q)/\#$ ist ein BANACHraum, wobei $f\#g := f + g$ f.ü.

Definition: Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt LEBESGUE-messbar $:\Leftrightarrow \chi_M$ ist messbar. Ist M messbar, so setzt man

$$\mu(M) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M dx & \text{falls } \chi_M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

μ heißt LEBESGUE-Maß von M bzw. das Maß von M . Im Unterschied hierzu ist das Maß aus §3 das JORDAN-Maß.

Satz 9.5: $\mu(M) = 0 \Leftrightarrow M$ ist Nullmenge.

Beweis: M ist Nullmenge $\Leftrightarrow \chi_M = 0$ f.ü. $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x) dx = 0$ nach Analysis II Kor. 2 aus dem Konvergenzsatz von LEVI.

Lemma 9.6:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $M_\nu \in \mathbb{R}^n$ messbar und paarweise disjunkt $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Dann:

$$\mu \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(M_\nu)$$

Hierbei ist definiert: $a + \infty = \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$ und $\infty + \infty = \infty$.

Beweis:

(1) Satz 9.5.

(2) folgt aus der Def. des LEBESGUE-Integrals als Grenzwert von Integralen über Treppenfunktionen.

Sei Σ die Menge der LEBESGUE-messbaren Teilmengen des \mathbb{R}^n .

Satz 9.7: Σ ist eine σ -Algebra und das LEBESGUE-Maß ist ein Maß auf Σ .

Korollar: Das LEBESGUE-Maß eingeschränkt auf die σ -Algebra der BOREL-Mengen ist ein Maß.

Beweis:

- (1) $\mathbb{R}^n \subset \Sigma$, denn z. z. \exists Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_n) \subset \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \chi_{\mathbb{R}^n} \equiv 1$.

Sei $Q_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq n \quad \forall i\}$ = Würfel um 0 mit Kantenlänge $2n$.

$\varphi_n := \chi_{Q_n} \in \mathcal{T}(I)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \equiv 1$.

- (2) $M \subset \Sigma \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus M \subset \Sigma$, denn: Genügt zu zeigen: $M \subset \Sigma \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus M \subset \Sigma$.

χ_M messbar. $\Rightarrow \chi_{\mathbb{R}^n \setminus M} = \chi_{\mathbb{R}^n} - \chi_M$ ist messbar nach 1. und Satz 9.4 (\mathcal{M} ist ein Vektorraum).

- (3) $M_i \in \Sigma \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \in \Sigma$, denn:

Setze $N_\nu := M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_\nu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow N_1 \subset N_2 \subset \dots$ mit $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} N_\nu = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$.

$\Rightarrow \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu = N_1 \dot{\cup} (N_2 \setminus N_1) \dot{\cup} (N_3 \setminus N_2) \dot{\cup} \dots$

N_ν messbar nach Satz 9.4 (3., endliche Vereinigung messbarer Mengen).

$\Rightarrow N_\nu \setminus N_{\nu-1}$ messbar (denn $\chi_{N_\nu \setminus N_{\nu-1}} = \chi_{N_\nu} - \chi_{N_{\nu-1}}$).

Mit Lemma 9.6 (2.) $\Rightarrow \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ messbar.

- (4) $\mu(\emptyset) = 0$, denn $\mu(\emptyset) = \int_{\mathbb{R}^n} 0 \cdot dx = 0$.

- (5) Sind $A_\nu \in \Sigma$ paarweise disjunkt, so ist $\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_\nu)$.

Dies folgt aus Lemma 9.6 (2.)