§10 Differenzierbare Untermannigfaltigkeiten

Def. :

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension $k :\Leftrightarrow$
zu jedem $a \in M$ $\exists$ offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und stetig diffbare Funktionen

$$f_1, \ldots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$$

s.d. gilt:

(a) $M \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\}$

(b) $Rg \, \frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-k})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a) = n - k$

Hierbei ist

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ist die Funktionalmatrix von $f = (f_1, \cdots, f_{n-k})^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$
Bed. $(b) \Leftrightarrow$ $\operatorname{grad} f_1, \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}$ sind lin. unabhängig über $\mathbb{R}$ in a.

Def. :

$M \subset \mathbb{R}^n$ diffbare Untermannigfaltigkeit der Klasse $\mathscr{C}^\alpha$ der Dimension k, wenn zusätzlich $f_1, \ldots, f_{n-k} \in \mathscr{C}^\alpha(U) \, (1 \leq \alpha \leq \infty)$

Beispiel :

$(n-1)$-dim. Umfk. $\subset \mathbb{R}^n$ = Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ =
lokal definiert durch eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f \neq (0, \ldots, 0)$

Beispiel :

$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$, denn mit $f(x) := x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1$ gilt:

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$

und $\operatorname{grad} f = (2x_1, \ldots, 2x_n) \neq (0, \ldots, 0)$

<u>Satz 10.1</u>:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim. Umfk. der Klasse $\mathscr{C}^\alpha$ und $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten gibt es offene Umgebungen

$$U' \subset \mathbb{R}^k \text{ von } a' = (a_1, \ldots, a_k)$$

$$U'' \subset \mathbb{R}^{n-k} \text{ von } a'' = (a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

und α-mal stetig diffbare Abbildung $g : U' \to U''$, s.d. gilt:

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in \mathbb{R}^n \mid x'' = g(x')\}$$

Dabei $x' = (x_1, \ldots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$
<u>M.a.W.</u> : k-dim. Umfk. des $\mathbb{R}^n \overset{lokal}{=}$ Graph einer Abb. von k Variablen

<u>Beweis</u> :

$\exists$ offene Umgebung U von a und α-mal stetig diffbare Abbildung
$f = (f_1, \ldots, f_{n-k}) : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit

$$M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\} \text{ und}$$

$$Rg \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = n - k$$

$\Rightarrow$ Für mind. ein $(n-k)$-Tupel $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{n-k} \leq n$ gilt:

$$\det \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial\big(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}\big)}(a) \neq 0$$

Stetigkeit der Funktionaldeterminante $\Rightarrow$
Œ $\det \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}\right)} \neq 0$ auf ganz U (eventuell U verkleinern)
Umnummerierung: Œ $(i_1, \ldots, i_{n-k}) = (k+1, \ldots, n)$

Satz über implizite Funktionen $\Rightarrow$

> $\exists$ Umgebungen U' von a' und U'' von a'' mit $U' \times U'' \subset U$, sowie stetig diffbare Abbildung $g : U' \to U''$ mit

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\}$$

Für die Funktionalmatrix von g gilt:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x'} = -\frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x''}\right)^{-1}$$

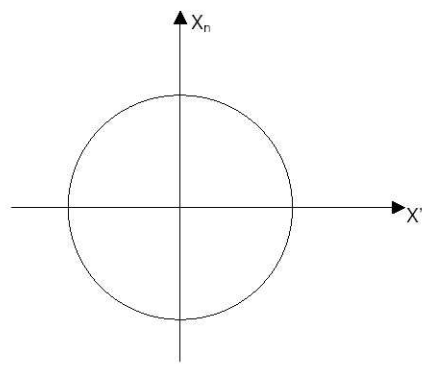
Da alle Komponenten der Matrizen $\frac{\partial f}{\partial x'}$ und $\frac{\partial f}{\partial x''}$ $(\alpha - 1)$-mal stetig diffbar sind $\Rightarrow g$ α-mal stetig diffbar.

$\square$

Beispiel :

$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$
$a = (a_1, \dots, a_n) \in S_{n-1}$ mit $a_n > 0$
Setzen: $U' = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid ||x'|| < 1\}$
und

$$g : \begin{cases} U' \to \mathbb{R}_+^* =: U'' \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} \end{cases}$$



$S_{n-1} \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x_n = g(x')\}$

Satz 10.2:

Sei $E_k := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} =$ k-Ebene in $\mathbb{R}^n$
Aquivalent sind:

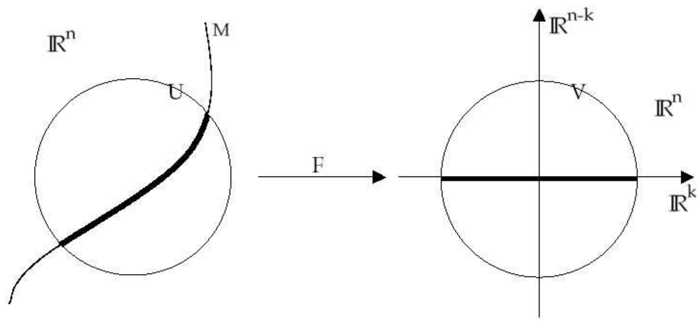
(1) $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim. Umfk. der Klasse $\mathscr{C}^\alpha$

(2) $\forall a \in M$ $\exists$offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathscr{C}^\alpha$-invertierbare Abb. $f : U \to V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, s.d.

$$F(M \cap U) = E_k \cap V$$

Also: k-dim. Umfk. von $\mathbb{R}^n$ verhalten sich lokal wie k-Ebenen in $\mathbb{R}^n$
Hierbei heißt $F : U \to V$ $\mathscr{C}^\alpha$-invertierbar

:$\Leftrightarrow$ F bijektiv und F sowie F^{-1} von der Klasse $\mathscr{C}^\alpha$



Beweis :

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim. Umfk. und $a \in M$

Satz 10.1 $\Rightarrow$ $M =$ Graph einer Abb. g in Umg. von a, d.h.

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\}$$

Def. :

$$F : \begin{cases} U = U' \times U'' \to \mathbb{R}^n \\ (x', x'') \mapsto (x', x'' - g(x')) \end{cases}$$

Sei $V = F(U)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und F ist Diffeomorphismus der Klasse $\mathscr{C}^\alpha$ mit

$$F(M \cap U) = V \cap E_k$$

Def. :

$U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen
$F : U \to V$ heißt Diffeomorphismus der Klasse $\mathscr{C}^\alpha$, falls F bijektiv und F und F^{-1} $(\alpha - 1)$-mal stetig diffbar

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \to V$ $\quad \mathscr{C}^\alpha$-invetierbar mit

$$F(M \cap U) = E_k \cap V \text{ gegeben}$$

$\Rightarrow M \cap U = \{x \in U \mid F_{k+1}(x) = \ldots = F_n(x) = 0\}$ und

$$Rg\,\frac{\partial(F_{k+1},\ldots,F_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = n-k, \text{ denn}$$

$$Rg\frac{\mathrm{d}(F_1,\ldots,F_n)}{\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)} = n \Rightarrow \text{ Beh.}$$

$\square$

Top. Raum $\mathbb{R}^n$ = top. Raum $M \subset \mathbb{R}^n$

induzierte Topologie von M:

Def. :

$V \subset M$ offen $\Leftrightarrow \exists$ offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $V = M \cap U$

M ist top. Raum, denn

(i) $\varnothing, M$ offen(da $\varnothing_M = M \cap \varnothing_{\mathbb{R}^n}$, $M = M \cap \mathbb{R}^n$)

(ii) $V_1, V_2 \subset M$ offen, d.h. $\exists U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $V_1 = U_1 \cap M$, $V_2 = U_2 \cap M$
$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap M) \cap (U_2 \cap M) = (U_1 \cap U_2) \cap M$ offen

(iii) $V_i\,(i \in I)$ offen in M, d.h. $V_i = U_i \cap M$, U_i offen im $\mathbb{R}^n$
$\Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} V_i = \bigcup\limits_{i\in I} (U_i \cap M) = \left(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\right) \cap M$, also offen in M

Lemma 10.3:

Sei $K \subset M$ Teilmenge

Äquivalent sind:

(1) K ist kompakt in M

(2) K ist kompakt in $\mathbb{R}^n$

Beweis :

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $K = \bigcup_{i\in I} V_i$ bel. offene Überdeckung von K in M

z.z.: $\exists i_1, \dots, i_n \in I : K = \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$

V_i offen in M, d.h. $\exists U_i$ offen in $\mathbb{R}^n$ mit $V_i = M \cap U_i$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i$ ist offene Überdeckung von K in $\mathbb{R}^n$

K kompakt in $\mathbb{R}^n \Rightarrow\ \exists i_1, \dots, i_n \in I$, s.d. $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$

$\Rightarrow K \subset (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}) \cap M = V_{i_1} \cup \dots \cap V_{i_n}$

(1) $\Rightarrow$ (2): Analog

$\square$

Sei $T \subset \mathbb{R}^k$ offen

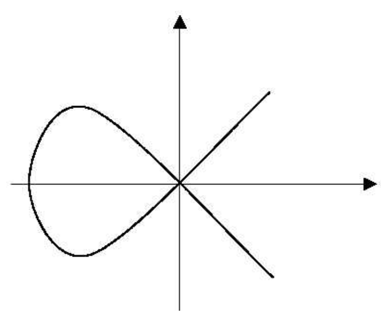
Def. :

$\varphi : T \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar heißt Immersion, falls

$$Rg \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x) = k \quad \forall x \in T$$

Beispiel :

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\underbrace{t^2-1}_{\varphi_1}, \underbrace{t\left(t^2-1\right)}_{\varphi_2}) \end{cases}$$



$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}\right) = \left(2t, 3t^2-1\right) \neq (0,0) \Rightarrow\ \varphi \text{ ist Immersion}$$

Aber φ ist nicht injektiv, denn $\varphi(1) = (0,0) = \varphi(-1)$

Satz 10.4:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion der Klasse $\mathscr{C}^\alpha$

$\Rightarrow\ \forall c \in \Omega\ \ \exists$ offene Umgebung $T \subset \Omega$, s.d. $\varphi(T)$ eine k-dim. Umfk.

der Klasse $\mathscr{C}^\alpha$ des $\mathbb{R}^n$ ist und $\varphi : T \to \varphi(T)$ ist ein Homöomorphismus.

Def. :

$f : V \to W$ Homöomorphismus top. Räume V und W $:\Leftrightarrow$
f bijektiv und f, f^{-1} stetig

Beweis :

Sei $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$
Da $Rg \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(c) = K$, so kann man nach ev. Umnummerierung der Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ annehmen, dass $\det \frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{\partial x_1,\ldots,x_k}(c) \neq 0$

Nach Satz über die Umkehrabb. (Analysis II, §6)
$\exists$ offene Umgebung $T \subset \Omega \subset \mathbb{R}^k$ von c und offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, s.d.

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) : T \to V$$

ein $\mathscr{C}^\alpha$-Diffeom. ist.

$\square$

Def. :

$\phi := (\phi_1, \ldots, \phi_n) : T \times \mathbb{R}^{n-k} \to V \times \mathbb{R}^{n-k}$ wird def. durch

$$\phi_i(t_1, \ldots, t_n) := \phi_i(t_1, \ldots, t_k) \text{ für } 1 \leq i \leq k$$

$$\phi_j(t_1, \ldots, t_n) := \phi_j(t_1, \ldots, t_n) + t_j \text{ für } k+1 \leq j \leq n$$

$\Rightarrow \phi$ ist ein $\mathscr{C}^\alpha$-Diffeom. (ϕ^{-1} ist gegeben durch $\begin{matrix} \varphi_i^{-1}(t_1, \ldots, t_n) \\ t_j - \varphi_j(t_1, \ldots, t_n) \end{matrix}$)
und $\phi(T \times \{0\}) = \varphi(T)$
Satz 10.2 $\Rightarrow \varphi(T)$ ist k-dim. Umfk. der Klasse $\mathscr{C}^\alpha$ und $\varphi : T \to \varphi(T)$ ist Homöom.