Proposition 2 :

(1) $f : M \to N, g : N \to P$ k-mal stetig diffbar
$\Rightarrow g \circ f : M \to P$ k-mal stetig diffbar

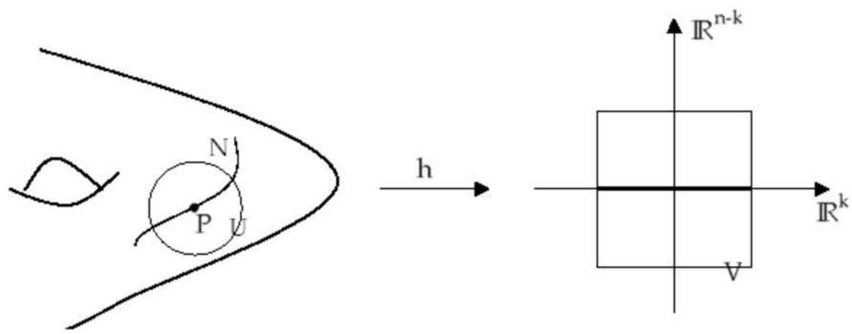
(2) $id : M \to M$ ist ∞ oft diffbar.

Bew.: klar

Definition :

Sei $M =$ diffbare Mfkt. der Dimension n.
Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt k-dimensionale Umfkt. von M :$\Leftrightarrow$
$\forall p \in N$ gibt es eine diffbare Karte $h : U \to V \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, s.d.

$$h(N \cap U) = V \cap \mathbb{R}^k$$



Proposition 3 :

(i) $N \subset M$ diffbare Umfkt. der dim $k \Rightarrow N =$ diffbare Mfkt. der dim k

(ii) Die kanonische Inklusion $N \overset{i}{\hookrightarrow} M$ ist eine diffbare Abbildung.

Bew.:

(i) M=hausdorffsch$\Rightarrow N$=hausdorffsch (denn $U \subset M$ offen$\Rightarrow U \cap N$ offen in N)
Aus den Karten von M erhält man Karten von N:
$h : U \to V$ wie in Def. $\Rightarrow h \mid U \cap N : U \cap N \to V \cap \mathbb{R}^k$
Ist $(U_\alpha) =$ offene Überdeckung von M ,
so $\Rightarrow (U_\alpha \cap N) =$ offene Überdeckung von $N \to$ diffb. Atlas von N $\Rightarrow (i)$

(ii) Sei $h : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ Karte, s.d. $h : U \cap N \to V \cap \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^k$ Karte von N

$$\begin{tikzcd}
U \cap N \arrow[r, hook] \arrow[d, "h \mid U \cap N"'] & U \arrow[d, "h"] \\
U \cap \mathbb{R}^k \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & \mathrm{V} \arrow[d, phantom, "\bigcap"] \\
\mathbb{R}^k & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}
\end{tikzcd}$$

$(x_1, \ldots, x_k) \longmapsto (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ also diffbar.

Beispiele für diffbare Mfkt.:

$\mathbb{R}^n$ = diffbare Mfkt.

Die Umfkt. von §10 sind alle diffbare Mfkt.

Seien M, N diffbare Mfkt. der dim m und n und $M \times N := \{(m,n) \mid m \in M, n \in N\}$, dann wird das zu einem topologischen Raum mittels

offene Mengen von $M \times N =$
alle endl. Durchschnitte von bel. Vereinigungen von Mengen der Form:
$U \times V$ mit $U \subset M$ offen, $V \subset N$ offen ($\Rightarrow$ ist topologischer Raum)

$M \times N$ heißt topologisches Produkt von M und N.
M, N hausdorfsch $\Rightarrow M, N$ h.d.

Bew.:
$(m_1, n_1) \neq (m_2, n_2)$ in $M \times N$ Œ $m_1 \neq m_2$. Da M h.d.
$\Rightarrow \exists U_1(m_1) \cap U_2(m_2) = \emptyset$
Sei $V_1(n_1), V_2(n_2)$

$\Rightarrow (U_1(m_1) \times V_1(n_1)) \cap ((U_2(m_2) \times V_2(n_2)) = \emptyset \Rightarrow$ Beh. Seien $h : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ und $h' : U' \to V' \subset \mathbb{R}^n$ diffb. Karten von M und N

$$\Rightarrow h \times h' : U \times U' \to V \times V' \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$$

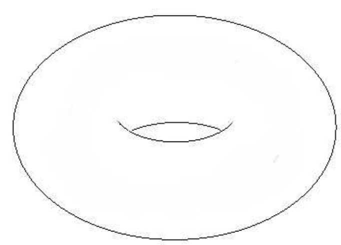
ist eine Karte von $M \times N$.
Auf diese Weise erhält man einen Atlas von $M \times N$ Kartenwechsel sind von der Form

$$\begin{array}{cccc} (k \times k') \circ (h \times h') : & h(U) \times h'(U') & \to & k(U) \times k'(U') \\ & \cap & & \cap \\ & \mathbb{R}^{m+n} & & \mathbb{R}^{m+n} \end{array}$$

Da dieser Kartenwechsel genau dann diffbar wenn die Komponenten diffbar sind
$\Rightarrow$ der Atlas ist diffbarer Atlas $\Rightarrow M \times N$ ist diffb. Mfkt. und heißt das Produkt von M und N

Beispiel 1 :

$S^1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ (1-Sphäre)
$\Rightarrow S^1 \times S^1$ ist diffbare Mfkt.



$(S^1)^n$ n-dim. Torus

Beispiel 2 (Der Projektive Raum $\mathbb{RP}_n$) :

$S_n := \{(x_0, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2\} =$ n-Sphäre

$$\mathbb{RP}_n := S_n \Big/ x \sim \pm = \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0 \Big/ x \sim \lambda x \quad \text{für } \lambda \neq 0$$

Es ist also: $[x_0, \cdots, x_n] = [\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n]$ mit $\lambda \neq 0$ falls $(x_0, \cdots, x_n) \neq (0, \cdots, 0)$
Bezeichnung: $(x_0 : \cdots : x_n) =$ Klasse von $(x_0, \cdots, x_n)$ - homogene Koordinaten

$$(x_0 : \cdots : x_n) = (\lambda x_0, \cdots, \lambda x_n) \text{ mit } \lambda \neq 0$$

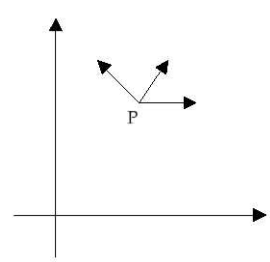
Versehe $\mathbb{RP}_n$ mit der Quotiententopologie:
Ist $\Pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}_n$ die Projektion, so sind genau die Mengen von $\mathbb{RP}_n$ offen, deren Urbilder in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ offen sind.
Insbesondere sind die Mengen $U_i := \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{RP}_n \mid x_i \neq 0\}$ offen. Die Abbildung

$$h_i : \begin{cases} U_i & \overset{\sim}{\to} \quad \mathbb{R}^n \\ (x_0 : \cdots : x_n) & \mapsto \quad (x_0/x_i x_1/x_i, \cdots x_i/x_i, \cdots, x_n/x_i) \end{cases}$$

ist bijektiv, also eine Karte.
Es ist $\mathcal{A} := \{h_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i=0,\cdots,n}$ ein Atlas denn $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{RP}_n$.
Beh.: $\mathcal{A}$ ist diffbarer Atlas d.h. Kartenwechsel sind diffbar.
Bew.:
z.zg.: $h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \to h_j(U_i \cap U_j)$ ist diffbar $\forall i \neq j$
Sei $(x_0 : \cdots : x_n) \in U_i \cap U_j$ d.h. $x_i \neq 0 \neq x_j$
$h_i(x_0 : \cdots : x_n) = (x_0/x_i, \cdots, \check{x_i/x_i}, \cdots, x_n/x_i) = (y_o, \cdots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \cdots, y_n)$
$\downarrow$ diffbar.
$h_j(x_0 : \cdots : x_n) = x_0/x_i, \cdots, x_i/x_j, \cdots, \check{x_i/x_i}, \cdots, x_n/x_i) = (y_0/y_i, \cdots y_{i-1}/y_j, 1/y_j, \cdots, y_j/y_j, \cdots, y$

§ 12 Der Tangentialraum T_pM

$T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$
Die Tangentialvektoren in $T_p\mathbb{R}^n$ können interpretiert werden als Ableitungen von diffbaren Kurven durch p:

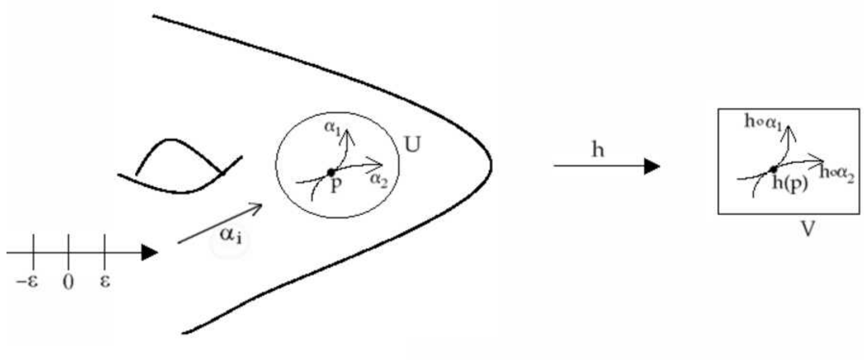


$$\alpha : \begin{cases} (-\varepsilon, \varepsilon) & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & p + tv \end{cases} \qquad \text{hat die Ableitung } \alpha'(0) = v$$

Diese Def. läßt sich verallgemeinern auf beliebige diffbare Mfkt.
Sei $M =$ diffbare Mfkt. und $p \in M$.

Definition :

2 diffb. Kurven $\alpha_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha_1(0) = p$ und
$\alpha_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha_2(0) = p$
heißen äquivalent, falls für eine Karte $h : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ um p gilt $(h \circ \alpha_1)'(0) = (h \circ \alpha_2)'(0)$



Lemma 1 :

Diese Def. hängt nicht ab von der Wahl der Karte.
Bew.:
Ist $g : V \to V' \subset \mathbb{R}^n$ ein Kartenwechsel, so ist

$$\begin{aligned}(gh\alpha_i)'(0) &= D(gh\alpha_i) = 0 = Dg(h\alpha_i(0)) \circ D(h\alpha_i)(0) \\ &= Dg(h\alpha_i(0))(h\alpha_i)'(0)\end{aligned}$$

Aber: $Dg(h(p))$ ist bijektiv

$$\Rightarrow (gh\alpha_1)'(0) = (gh\alpha_2)'(0) \Leftrightarrow (h\alpha_1)'(0) = (h\alpha_2)'(0)$$

Dadurch ist eine Äquivalenzrelation definiert.

Definition :

Ein Tangentenvektor von M in p ist eine Äquivalenzrelation $[\alpha]$ von diffbaren Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\alpha(0) = p$
Bez.: $\dot{\alpha}\ (0)$

$T_pM :=$ { Tangentenvektoren von M in p} = Tangentialraum von M in p
Sei $f : M \to N$ eine diffbare Abb von Mfkt mit $f(p) = q$

Definition :

Die Abb.

$$T_p f : \begin{cases} T_pM & \to & T_qN \\ [\alpha] & \mapsto & [f \circ \alpha] \end{cases}$$

heißt die Tangentialabbildung oder das Diffential von f in p.

Lemma 2 :

$T_p f$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der diffb. Kurve.

Bew.:

Sei $h : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ Karte in p mit $h(p) =: r \in \mathbb{R}^n$

Jede Kurve α durch p ist in p von der Form

$$\alpha = h^{-1}\beta \text{ mit } \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \subset \mathbb{R}^n \quad \beta(0) = r$$

Sei $[h^{-1}\beta_1] = [h^{-1}\beta_2]$ d.h. $\beta_1'(0) = \beta_2'(0)$

z.zg.: $[fh^{-1}\beta_1] = [fh^{-1}\beta_2]$

Sei $k : U' \to V' \subset \mathbb{R}^m$ Karte von M um $q = f(p)$

$$(kfh^{-1}\beta_1)'(0) = D(kfh^{-1})(r)\beta_1'(0) = D(kfh^{-1})(r)\beta_2'(0) = (kfh^{-1}\beta_2)'(0)$$

$$\Rightarrow [fh^{-1}\beta_1] = [fh^{-1}\beta_2]$$