

$M =$ diffbare Mfkt $p \in M$

$\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha_i(0) = p \Leftrightarrow \exists$ Karte $h : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ um p , s.d. $(h \circ \alpha_1)'(0) = (h \circ \alpha_2)'(0)$

$T_p M := \{ \text{Äquivalenzklassen } [\alpha] \}$ $f : M \rightarrow N$ $f(p) = q$

$$T_p f : \begin{cases} T_p M & \longrightarrow & T_{f(p)} M \\ [\alpha] & \longmapsto & [f \circ \alpha] \end{cases}$$

Lemma 3 :

- (i) $T_p(id_M) = id_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$
- (ii) Ist $g : N \rightarrow P$ diffbare Abb. von Mfk mit $g(q) = r$
 $\Rightarrow T_p(g \circ f) = T_q(g) \cdot T_p(f) : T_p M \rightarrow T_r P$

Bew:

- (i) $T_p(id_M)[\alpha] = [id_M \circ \alpha] = [\alpha]$
- (ii) $T_p(g \circ f)[\alpha] = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = T_q(g)[f \circ \alpha] = T_q(g) \circ T_p(f)[\alpha]$

Sei $h : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ Karte um $p \in U \subset M$ mit $h(p) = 0$

Fassen V auf als Mfkt, so haben wir 2. Definition des Tangentialraumes:

- (1) $T_0 V = \mathbb{R}^n$
- (2) $T_0 V = \{ [\alpha] \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V, \alpha(0) = 0 \}$

Die beiden Definitionen stimmen überein, denn

$$v \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \text{Kurve } \alpha : \begin{cases} (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & V \\ t & \longmapsto & q + tv \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\alpha] = v$$

Da h ein Diffeomorphismus, d.h. $h \circ h^{-1} = id$, $h^{-1} \circ h = id$ und h, h^{-1} diffbar

$$\Rightarrow T_p(h) \circ T_0(h^{-1}) \stackrel{L3(2)}{=} T_0(h \circ h^{-1}) = T_0(id_V) \stackrel{L3(1)}{=} id_{T_0 V}$$

$$T_0(h^{-1}) \circ T_p(h) = \dots \dots = id_{T_p M}$$

$\Rightarrow T_p(h)$ ist bijektive Abb.

Definiere \mathbb{R} -VR Struktur auf T_pM , s.d.

$$T_p(h) : T_pM \rightarrow T_0V = \mathbb{R}^n$$

ein \mathbb{R} -VR ist.

Diese \mathbb{R} -VR Struktur hängt nicht ab von der Wahl der Karte h ,
denn für einen Kartenwechsel $g : V \rightarrow V'$, $g(0) = 0$ ist

$$\begin{array}{ccc} T_0V & \longrightarrow & T_0V' \\ || & & || \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Dg(p)} & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \text{ein } \mathbb{R}\text{-VR-Isomorphismus}$$

Also: $M = n$ -dim. diffbare Mfkt $\Rightarrow \forall p \in M$ ist T_pM ein \mathbb{R} -VR der Dimension n

Sei $f : M^m \rightarrow N^n$ diffbare Abb. mit $f(p) = q$

Sei

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \cup & & \cup \\ U & \xrightarrow{f} & U' & (*) \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ \mathbb{R}^m \supset V & \xrightarrow{h'fh^{-1}} & V' \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Lemma 4 :

(*) induziert:

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{T_p f} & T_qN \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq & \text{kommutatives Diagramm!} \\ \mathbb{R}^m = T_{h(p)}V & \xrightarrow{D(h'fh^{-1})|_{h(p)}} & T_{h'(q)}V' = \mathbb{R}^n \end{array}$$

d.h. in lokalen Karten ist $T_p f$ gegeben durch die Jacobi-Abbildung

Bew.:

z.z.: Die Abb. \simeq bildet v ab auf $D(h'fh^{-1})|_{h(p)}(v)$

$$\begin{array}{ccc}
[h^{-1}(r+tv)] & \longrightarrow & [f \circ h^{-1}(r+tv)] \\
\uparrow & & \downarrow \\
\frac{d}{dt}\Big|_{h(p)}(r+tv) = v = [r+tv] & & [h'f \circ h^{-1}(r+tv)] \\
& & \parallel \\
& & \frac{d}{dt}\Big|_{h(p)}((h'fh^{-1})(r+tv)) = \\
& & = D(h'fh^{-1})\Big|_{h(p)}(v)
\end{array}$$

□

Insbesondere: $T_p f$ ist ein \mathbb{R} -VR-Homomorphismus, d.h. \mathbb{R} -linear

Bemerkung :

Sei $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = p$ diffbare Kurve $\rightsquigarrow T_0(\alpha) \rightarrow T_p M$
 $T_0 \mathbb{R} = \mathbb{R}$ Die $1 \in \mathbb{R}$ ist Basis von $T_0 \mathbb{R} = \mathbb{R}$

Sei $v = [\alpha] \in T_p M \Rightarrow v = T_0 \alpha(1)$

Bew.:

Die Kurve

$$id_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t \end{array} \right.$$

repräsentiert den Tangentenvektor $1 \in T_p \mathbb{R} \Rightarrow v = [\alpha] \stackrel{\alpha \circ id = \alpha}{=} T_0 \alpha[id_{\mathbb{R}}] = T_0 \alpha(1)$

Definition :

Sei $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ diffbare Funktion

$$v \in T_p M \rightsquigarrow T_p \varphi : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$v(\varphi) := (T_p \varphi)(v) \in T_{\varphi(p)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ heißt Richtungsableitung von φ in Richtung v

Ist $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Kurve die v repräsentiert, so ist α auch eine Abb. von diffbaren Mfkt.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v(\varphi) &= (T_p \varphi)(v) \stackrel{Bem.}{=} T_p \varphi(T_0 \alpha(1)) \\
&= (T_p \alpha \circ T_0 \alpha)(1) \stackrel{L3}{=} T_0(\varphi \circ \alpha)(1) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0(\varphi \circ \alpha)(1)
\end{aligned}$$

In lokalen Koordinaten beschreibt sich die Richtungsableitung wie folgt:

Sei $U \subset M$ eine Kartenumgebung um $p \in M$

Identifizieren $U \subset M$ mit offenem Teil von \mathbb{R}^n

$\Rightarrow \varphi|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist diffbare Fkt. in $U \subset \mathbb{R}^n$

Ist $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in T_p U = \mathbb{R}^n$, so ist nach Kettenregel:

$$v(\varphi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varphi \circ (p + tv) \stackrel{KR}{=} \sum_{i=1}^n v_i \frac{d}{dx_i} \varphi(p)$$

Also: Alte = Neue Def. von Richtungsableitung.

Insbesondere entsprechen die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n$ den Richtungsableitungen $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$

Deshalb bezeichnen wir den Tangentialvektor, der durch die Kurve

$$\begin{cases} (-\varepsilon, \varepsilon) & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & p + te_i \end{cases}$$

repräsentiert wird mit

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p \in T_p U = T_p M$$

\Rightarrow Die $\left. \frac{d}{dx_i} \right|_p$ bilden Basis von $T_p M$.

Achtung: Diese Basis ist nur bzgl. einer festen Karte definiert!

In lokalen Koordinaten ist: Tangentialabb. = Differential der Abb (= Jacobi-Abb.)

Definition :

Sei $f : M^m \rightarrow N^n$ diffbare Abb. $p \in M$ $rg_p f := rg T_p f$ heißt Rang von f in p .

f heißt Immersion, falls $Rg_p f = dim M = m$

f heißt Submersion, falls $Rg_p f = dim N = n \quad \forall p \in M$

Lemma 5 :

Sei $f : M \rightarrow N$ stetig diffbar und $Rg_p f = k$

$\Rightarrow \exists$ Umgebung $U = U(p)$ s.d. $Rg_q f \geq k \forall q \in U$

Bew.:

Da der Rang lokal definiert ist, können wir \mathbb{C} annehmen

$$f : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n \quad p = 0 \in U$$

$$\Rightarrow T_0 f = Df(0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{matrix}$$

\mathbb{C} (durch Vertauschen der Koordinaten) können wir annehmen:

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots n}^k \neq 0$$

Da $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ stetig

$$\Rightarrow \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1, \dots, n}^k \neq 0 \quad \forall x \in U(0)$$

$$\Rightarrow Rg \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right) \geq k$$

Der Rang kann also in einer Umgebung nicht fallen, aber er kann steigen:

Beispiel 1 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_p f = 2\varphi = \begin{cases} 0 & \text{falls } p = 0 \\ \neq 0 & \text{falls } p \neq 0 \end{cases}$$

Lokale Eigenschaften einer diffbaren Abb. $f : M \rightarrow N$ kann man immer bzgl. Karten beschreiben.

Genauer:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \cup & & \cup \\
 p \in U & & U' \\
 h \downarrow & & \downarrow h' \\
 V & \longrightarrow & V' \\
 \cap & & \cap \\
 \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Identifiziert man U mit V und U' mit V' so ist $f|_U : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$

In lokalen Koordinaten ist f gegeben durch $f : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$

Satz 1 (Rangatz) :

Sei $f : M^m \rightarrow N^n$ stetig diffbare Abb. von konstantem $Rg(k)$ lokal um $p \in M$
 \Rightarrow bzgl. geeigneten lokalen Koordinaten um p ist f gegeben durch

$$\left\{ \begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^m \supset U & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^n \\
 (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)
 \end{array} \right.$$