

**Satz 1** (Rangsatz) :

Sei  $f : M^m \rightarrow N^n$  stetig diffbare Abb. von konstantem Rang  $k$  lokal um  $p \in M$   
 $\Rightarrow$  bzgl. geeigneten lokalen Koordinaten um  $p$  ist  $f$  gegeben durch

$$\begin{cases} \mathbb{R}^m \supset U & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

Beweis :

$\mathbb{E}$  ist  $f$  bereits lokal gegeben durch eine differenzierbare Abbildung

$$\mathbb{R}^m \supset U \xrightarrow{f} V \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{um } 0 \in \mathbb{R}^m$$

$Rg_0 f = k \Rightarrow \mathbb{E}$  (nach ev. Ummummerierung der Koordinaten) ist

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right)_{i,j=1}^k \neq 0$$

$$\varphi : \begin{cases} U & \longrightarrow & U' \subset \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_m) \end{cases}$$

ist eine diffb. Abbildung mit

$$D\varphi = \left( \begin{array}{c|c} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & * \\ \hline 0 & \mathbb{1} \end{array} \right) \begin{matrix} \} k \\ \} n - k \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \det D\varphi(\gamma) = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right) \neq 0$$

Satz von der Umkehrabbildung  $\Rightarrow \exists$  Umgebung  $U_1 \subset U$  und  $U'_1 \subset \mathbb{R}^m$ , s.d.

$\varphi|_{U_1} : U_1 \rightarrow U'_1$  umkehrbar ist.

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\varphi} & U'_1 & (x_1, \dots, x_m) \longmapsto (f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_m) \\ f \searrow & & \swarrow g := f \circ \varphi^{-1} & \searrow \quad \swarrow \\ & & V_1 & (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$$

$$\Rightarrow g(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_{k+1}, g_{k+1}(y), \dots, g_m(y))$$

$$\Rightarrow Dg = \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{1} & 0 \\ \hline * & \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \end{array} \right) \begin{matrix} \} k \\ \} m - k \end{matrix}$$

Aber  $g$  hat lokal den Rang  $k$ , denn  $Rg f = k$

$$\Rightarrow \text{In einer Umgebung von } 0 \text{ ist } \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) = 0 \quad \forall j > k$$

Also etwa auf  $\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y_i| < \varepsilon \forall i\}$  gilt:

$$\forall i > k \text{ ist } g_i(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = g_i(y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0) =: g_i(y_1, \dots, y_k)$$

$$\Rightarrow g(y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_k, g_{k+1}(y_1, \dots, y_k), \dots, g_m(y_1, \dots, y_k))$$

Wir betrachten jetzt die Koordinatentransformation

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (z_1, \dots, z_n) & \longmapsto (z_1, \dots, z_k, z_{k+1} - g_{k+1}(z_1, \dots, z_k), \dots, z_n - g_n(z_1, \dots, z_k)) \end{cases}$$

( $\psi^{-1}$  existiert und ist gegeben durch

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_k, z_{k+1} + g_{k+1}(z_1, \dots, z_k), \dots, z_n + g_n(z_1, \dots, z_k))$$

$$\Rightarrow \psi \circ g(y_1, \dots, y_m) = \psi(y_1, \dots, y_k, g_{k+1}(y_1, \dots, y_k), \dots, g_n(y_1, \dots, y_k)) = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$$

Aber:  $\psi \circ g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ . Das liefert die Behauptung.

□

**Korollar** :

- (1) Ist  $f : M^m \rightarrow N^n$  eine Immersion lokal um  $p \in M$ , d.h.  $Rg_p f = m$ , so ist  $f$  lokal gegeben durch

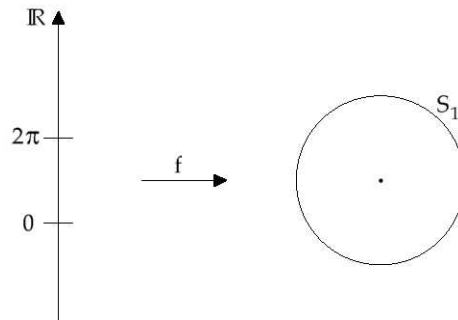
$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

- (2) Ist  $f : M^m \rightarrow N^n$  eine Submersion lokal um  $p \in M$ , d.h.  $Rg_p f = n$ , so ist  $f$  lokal um  $p$  gegeben durch

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$

Bemerkung : In (1) ist  $f$  lokal injektiv, muss aber nicht global injektiv sein.

$$\text{Beispiel : } f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ t & \longmapsto e^{2\pi i t} \end{cases}$$



Sei  $f : M^m \rightarrow N^n$  diffebare Abbildung diffebarer Mannigfaltigkeiten.

**Def. :**

$q \in N$  heißt regulärer Wert von  $f$ , falls gilt:

$$Rg_p f = n \quad \forall p \in f^{-1}(q)$$

(Insbesondere  $m \geq n$ )

**Satz 2** (Satz vom regulären Wert) :

Ist  $q \in N$  ein regulärer Wert der  $\mathcal{C}^\infty$ -Abb.  $f : M^m \rightarrow N^n$ , so ist

$$f^{-1}(q) \subset M$$

eine diffebare Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m-n$  von  $M$

**Beweis :**

Sei  $p \in f^{-1}(q)$ . Nach Rangsatz hat  $f$  in lokalen Koordinaten um  $p$  die Gestalt

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

$q$  hat dabei die Koordinaten  $0 \in \mathbb{R}^n$ .

$\Rightarrow f^{-1}(0)$  ist lokal durch die Gleichung  $x_1 = \dots = x_n = 0$  gegeben.

Das ist aber eine Untermannigfaltigkeit der Dimension  $m-n$ .

□

## §13 Alternierende Multilinearformen

Sei  $V$  ein  $n$ -dim.  $\mathbb{R}$ -VR (später immer  $V = T_p M$ )

$\forall k \in \mathbb{N}$  sei  $V^k := \bigotimes_{i=1}^k V = \{(v_1, \dots, v_k) \mid v_j \in V\}$

**Def. :**

Eine Multilinearform vom Grad  $k$  oder kurz  $k$ -Form ist eine multilineare Abb.

$$f : V^k \rightarrow \mathbb{R}$$

d.h. es gilt  $\forall i = 1, \dots, k, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v_i, v, w \in V$

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v + \mu w, v_{i+1}, \dots, v_k) =$$

$$\lambda f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_k) + \mu f(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_k)$$

**Beispiel :**

Ein Skalarprodukt  $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine 2-Form.

Eine 1-Form ist  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ , also ein Element von  $V^*$ .

Die Menge aller  $k$ -Formen auf  $V$  bildet einen  $\mathbb{R}$ -VR, den wir mit  $F^k V$  bezeichnen.

**Lemma 1 :**

$$\dim V = n \Rightarrow \dim F^k V = n^k$$

**Beweis :**

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Basis von  $V$ .

Wegen der Multilinearität ist eine  $k$ -Form eindeutig festgelegt durch ihre Werte auf allen  $k$ -Tupeln  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  und diese Werte kann man beliebig vorgeben.

$$\Rightarrow F^k V = \{f : (e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \rightarrow \mathbb{R} \mid 1 \leq i_\nu \leq n, \nu = 1, \dots, k\}$$

$$\Rightarrow \text{Die } k\text{-Tupel bilden Basis von } F^k V \Rightarrow \dim F^k V = n^k$$

□

Setze  $F^0 V := \mathbb{R}$

**Proposition 2 :**

Für eine  $k$ -Form  $f : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  sind äquivalent:

$$(1) f(v_1, \dots, v_k) = -f(v_1, \dots, \underbrace{v_j}_{\#i}, \dots, \underbrace{v_i}_{\#j}, \dots, v_k)$$

$$(2) f(v_1, \dots, v_k) = \text{sign}(\sigma) \cdot f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \quad \forall \sigma \in S_k, \text{ wo}$$

$$\text{sign}(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{i - j}{\sigma(i) - \sigma(j)}$$

$$(3) f(\dots, \underbrace{v}_{\#i}, \dots, \underbrace{v}_{\#j}, \dots) = 0$$

**Beweis :**

(1)  $\Leftrightarrow$  (2) : Folgt daraus, dass die Gruppe  $S_k$  von Transpositionen erzeugt wird.

$$(1) \Rightarrow (3) : f(\dots, \underbrace{v}_{\#i}, \dots, \underbrace{v}_{\#j}, \dots) = -f(\dots, \underbrace{v}_{\#j}, \dots, \underbrace{v}_{\#i}, \dots) \Rightarrow = 0$$

$$\begin{aligned} (3) \Rightarrow (1) : 0 &= f(\dots, \underbrace{v_i + v_j}_{\#i}, \dots, \underbrace{v_i + v_j}_{\#j}, \dots) = \\ &= f(\dots, \underbrace{v_i}_{\#i}, \dots, \underbrace{v_i}_{\#j}, \dots) + f(\dots, \underbrace{v_i}_{\#i}, \dots, \underbrace{v_j}_{\#j}, \dots) + \\ &+ f(\dots, \underbrace{v_j}_{\#i}, \dots, \underbrace{v_j}_{\#j}, \dots) + f(\dots, \underbrace{v_j}_{\#i}, \dots, \underbrace{v_i}_{\#j}, \dots) \\ &\Rightarrow f(\dots, \underbrace{v_i}_{\#i}, \dots, \underbrace{v_j}_{\#j}, \dots) = -f(\dots, \underbrace{v_j}_{\#i}, \dots, \underbrace{v_i}_{\#j}, \dots) \end{aligned}$$

□

**Def. :**

Eine  $k$ -Form  $f : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  heißt alternierend, wenn eine der 3 Bedingungen aus Proposition 2 erfüllt ist.

$\text{Alt}^k(V) := \{f \in F^k V \mid f \text{ alternierend}\}$  ist ein UVR von  $F^k V$

**Proposition 3 :**

Sei  $f : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  alternierend.

Sind  $\{v_1, \dots, v_k\} \in V$  lin. abh.  $\Rightarrow f(v_1, \dots, v_k) = 0$

Beweis :

$$\{v_1, \dots, v_k\} \in V \text{ lin. abh.} \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0 \text{ und nicht alle } \alpha_i = 0$$

$$\text{E} \quad \alpha_k = 1 \Rightarrow v_k = - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i$$

$$f(v_1, \dots, v_k) = f(v_1, \dots, v_{k-1}, - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i) = - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f(v_1, \dots, v_{k-1}, v_i) = 0$$

□

Korollar :

$$k > \dim V \Rightarrow \text{Alt}^k(V) = 0$$

Die Gruppe  $S_k$  operiert auf  $F^k V$  mittels

$$\begin{cases} S_k \times F^k V & \rightarrow F^k V \\ (\sigma, f) & \mapsto \sigma \circ f \end{cases}$$

Wobei  $\sigma \circ f(v_1, \dots, v_k) = \text{sign}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$

Nach Proposition 2 gilt:  $f \in \text{Alt}^k(V) \Leftrightarrow \sigma \circ f = f \quad \forall \sigma \in S_k$

Definiere Projektion

$$p : \begin{cases} F^k V & \rightarrow F^k V \\ f & \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \circ f \end{cases}$$

Lemma 4 :

$p$  ist eine Projektion, d.h. eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung mit  $p^2 = p$ .

Beweis :

$p$  ist offensichtlich  $\mathbb{R}$ -linear.

Nach Proposition 2 ist  $\text{Im } p \subset \text{Alt}^k(V)$ , denn  $\forall \tau \in S_k$  ist

$$\tau \left( \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \circ f \right) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\tau \sigma) \circ f = \frac{1}{k!} \sum_{(\tau \sigma) \in S_k} (\tau \sigma) \circ f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \circ f$$

Sei  $f \in \text{Alt}^k(V)$  z.Z.  $p(f) = f$

$$p(f) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma \circ f = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} f = \frac{k!}{k!} f = f$$

□