

§14 Differentialformen auf \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n , $p \in \mathbb{R}^n$

$$T_p\mathbb{R}^n = \{p + v \mid v \in \mathbb{R}^n\} = p + \mathbb{R}^n$$

$$\exists \text{ kanonische Bijektion } \begin{cases} T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ p + v \mapsto v \end{cases}$$

Wir fassen $T_p\mathbb{R}^n$ immer bzgl. dieser Identifikation als \mathbb{R}^n auf.

Sei $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n = T_p\mathbb{R}^n$.

Wir können e_i mit $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ identifizieren.

Definition :

Ein Vektorfeld auf \mathbb{R}^n ist eine Abb.

$$v : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} T_p\mathbb{R}^n \\ p \mapsto v(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p)e_i = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}|_p \end{cases}$$

mit Funktionen $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Ein VF v auf \mathbb{R}^n heißt diffbar (∞ oft diffbar), wenn alle a_i diffbar sind.

$\forall p \in \mathbb{R}^n$ sei $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ der Dualraum.

Es bezeichne $\{dx_i|_p \mid i=1, \dots, n\}$ die duale Basis von $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}$, d.h. $dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_p \right) = \delta_{ij}$

Eine Form vom Grad 1 auf \mathbb{R}^n ist eine Abb.

$$\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} (T_p\mathbb{R}^n)^*$$

Eine Differentialform vom Grad 1 auf \mathbb{R}^n oder kurz (diffb.) 1-Form auf \mathbb{R}^n ist eine Abb.

$\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} (T_p\mathbb{R}^n)^*$ derart, dass

$$w(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) dx_i|_p =: \sum_{i=1}^n a_i dx_i$$

mit diffbaren Funktionen $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Beispiel :

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

Das Differential df ist definiert durch $df|_p(v_p) := v_p(f) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \forall v_p \in \mathbb{R}^n$

= Richtungsableitung von f in Richtung v_p an der Stelle p

Wir hatten in §13:

$$\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \big|_p \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\} \text{ ist Basis von } \text{Alt}^k(T_p\mathbb{R}^n)$$

Eine Differentialform vom Grad k auf \mathbb{R}^n oder kurz (diffbare) k -Form ist eine Abb.

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \text{Alt}^k(T_p\mathbb{R}^n)$ derart, dass

$$\varphi(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(p) dx_{i_1} \big|_p \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \big|_p =: \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

mit diffbaren Funktionen $a_{i_1 \dots i_k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

§13 Korollar \Rightarrow Sind $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1-Formen und v_1, \dots, v_k VF auf \mathbb{R}^n , so ist

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j))$$

insbesondere

$$\begin{aligned} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) &= \delta_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k} := \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_k j_k} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } (i_1 \dots i_k) = (j_1 \dots j_k) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Schreibweise: $I : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$\varphi = \sum_I a_I dx_I := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

Eine (diffbare) 0-Form auf \mathbb{R}^n ist eine diffbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Beispiele für \mathbb{R}^3 :

0-Formen: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

1-Formen: $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$

2-Formen: $a_{12} dx_1 \wedge dx_2 + a_{13} dx_1 \wedge dx_3 + a_{23} dx_2 \wedge dx_3$

3-Formen: $a_{123} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

Sei $\omega_1 = \sum_I a_I dx_I$, $\omega_2 = \sum_I b_I dx_I$ diffbare k -Formen.

$$\Rightarrow \omega_1 + \omega_2 := \sum_I (a_I + b_I) dx_I$$

Sei $\omega = \sum_I a_I dx_I$ k -Form und $\varphi = \sum_J a_J dx_J$ l -Form

$$\Rightarrow \omega \wedge \varphi := \sum_I a_I dx_I \wedge \sum_J b_J dx_J = \sum_{I, J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$$

ist eine diffbare $(k+l)$ -Form.

Beispiel :

$$\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 \quad \text{1-Form auf } \mathbb{R}^3$$

$$\varphi = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3 \quad \text{2-Form auf } \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \omega \wedge \varphi &= (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3) \wedge (x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3) \\ &= x_1^2 dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_1 dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_1 x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad + x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_1 x_3 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_3 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &= -x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_1 x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (x_1 x_3 - x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

Proposition 2 :

Sei $\omega = k$ -Form, $\varphi = l$ -Form, $\psi = m$ -Form auf \mathbb{R}^n

$$(1) \quad \omega \wedge (\varphi + \psi) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \psi \quad \text{falls } l = m$$

$$(2) \quad \omega \wedge \varphi = (-1)^{kl} \varphi \wedge \omega$$

$$(3) \quad (\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$$

Bew.:

§ 13 Proposition 5

Beispiel :

Obwohl $\omega \wedge \omega = 0$ für 1-Formen ist, gilt nicht notwendig $\omega \wedge \omega = 0$ für beliebige k -Formen: z.B. $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ auf \mathbb{R}^4

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega &= (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \wedge (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \\ &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \\ &\quad + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ &= 2(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4) \neq 0 \end{aligned}$$

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diffbar. Für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ ist $df|_p := Df|_p : T_p \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m$ ein VR-Homomorphismus, das Differential von f in p

§ 13 Proposition 7 $\Rightarrow df_p$ induziert einen \mathbb{R} -VR Homomorphismus

$$(df_p)^* = \text{Alt}^k(df_p) : \text{Alt}^k(T_{f(p)} \mathbb{R}^m) \rightarrow \text{Alt}^k(T_p \mathbb{R}^n)$$

Das gilt $\forall p \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f$ induziert Abb. $f^* : \{k\text{-Formen auf } \mathbb{R}^m\} \rightarrow \{k\text{-Formen von } \mathbb{R}^n\}$,
nämlich: ist ω eine k -Form auf \mathbb{R}^m ($k \geq 1$)

$$f^*\omega|_p(v_1, \dots, v_k) := \omega|_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \quad \forall v_1, \dots, v_k \in T_p\mathbb{R}^n$$

Für 0-Formen setzen wir: $f^*g := g \circ f$

Lemma 2 :

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diffbar, $\varphi, \psi = k$ -Formen auf \mathbb{R}^m , $g = 0$ -Form auf \mathbb{R}^m

$$(1) \quad f^*(\varphi + \psi) = f^*\varphi + f^*\psi$$

$$(2) \quad f^*(g\varphi) = f^*g \cdot f^*\varphi$$

(3) Sind $\omega_1, \dots, \omega_k$ 1-Formen auf \mathbb{R}^m so ist

$$f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) = (f^*\omega_1) \wedge \dots \wedge (f^*\omega_k)$$

Bew.:

Sei $p \in \mathbb{R}^n$, $v_1, \dots, v_k \in T_p\mathbb{R}^n$

(1)

$$\begin{aligned} f^*(\varphi + \psi)|_p(v_1, \dots, v_k) &= (\varphi + \psi)|_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\ &= \varphi|_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) + \\ &\quad + \psi|_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\ &= (f^*\varphi)|_p(v_1, \dots, v_k) + (f^*\psi)|_p(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f^*(g \cdot \varphi)|_p(v_1, \dots, v_k) &= (g\varphi)|_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\ &= g \circ f(p) \cdot \varphi|_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\ &= f^*g|_p \cdot (f^*\varphi)|_p(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)|_p(v_1, \dots, v_k) &= (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)|_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)) \\ &= \det(\varphi_i|_{f(p)}(df_p(v_j))) \\ &= \det(f^*\varphi_i|_p(v_j)) \\ &= f^*\varphi_1|_p \wedge \dots \wedge f^*\varphi_k|_p(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

Sei $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n(x_1, \dots, x_n)$, $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m(y_1, \dots, y_m)$

$\Rightarrow f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist gegeben durch $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$

$\forall p \in \mathbb{R}^n$ ist $df_i|_p : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_{f_i(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$

Das liefert die Abb.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} (T_p\mathbb{R})^* \\ p \mapsto df_i|_p \end{array} \right. \quad \text{also eine 1- Form}$$

Also : df_i ist das Differential von f_i .

Das gilt $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere: $dx_i =$ das Differential der Funktion x_i

Korollar :

$$\omega = \sum_I a_I dy_I \quad k\text{-Form auf } \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow f^*\omega = \sum_I a_I(f_1, \dots, f_m) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$$

Bew.:

$$\begin{aligned} f^*\omega &\stackrel{L2(1),(2)}{=} \sum_I f^*(a_I) f^*(dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}) \\ &\stackrel{L2(3)}{=} \sum_I f^*(a_I) (f^*dy_{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dy_{i_k}) \end{aligned}$$

Aber $\forall p \in \mathbb{R}^n$, $\forall v \in T_p\mathbb{R}^n$ ist:

$$\begin{aligned} f^*dy_i|_p(v) &= dy_i|_{f(p)}(df|_p(v)) \\ &= (dy_i \circ df)|_p(v) \\ &= d(y_i \circ f)|_p(v) \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= df_i|_p(v) \Rightarrow f^*dy_i = df_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^*\omega = \sum_I a_I(f_1, \dots, f_m) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$$

Bemerkung :

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so ist eine k -Form auf U eine Abb. $U \rightarrow \bigcup_{p \in U} Alt^k(T_p\mathbb{R}^n)$, s.d.

$$\omega(p) = \sum_I a_I(p) dx_I|_p$$

mit $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar auf U .