

Beispiel: Sei $U := \{(r, \theta) \mid r > 0, 0 < \theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2(x, y)$ geg. durch $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \text{ 1-Form auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Was ist $f^*\omega$?

$$f^*dx = d(f_1(r, \theta)) = d(r \cos \theta) = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

$$f^*dy = d(f_2(r, \theta)) = d(r \sin \theta) = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) f^*dx + f^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) f^*dy = \\ &= -\frac{r \sin \theta}{r^2} \cos \theta dr + \frac{r \sin \theta}{r^2} r \sin \theta d\theta + \frac{r \cos \theta}{r^2} \sin \theta dr + \frac{r \cos \theta}{r^2} r \cos \theta d\theta = \\ &= \left(-\frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r} + \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{r}\right) dr + (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta = d\theta \end{aligned}$$

Proposition 3

Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

φ, ψ Diffeomorphismen auf $\mathbb{R}^m \Rightarrow$

$$(1) f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*\varphi \wedge f^*\psi$$

$$(2) (f \circ g)^*\varphi = g^*f^*\varphi$$

Beweis:

(1) Sei $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ $i = 1, \dots, m$

$$\varphi = \sum_I a_I dy_I, \quad \psi = \sum_J b_J dy_J$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f^*(\varphi \wedge \psi) &= f^*\left(\sum_{I,J} a_I(y_1, \dots, y_m) b_J(y_1, \dots, y_m) dy_I \wedge dy_J\right) = \\ &= \sum_{I,J} a_I(f_1, \dots, f_m) b_J(f_1, \dots, f_m) df_I \wedge df_J = \\ &= \sum_I a_I(f_1, \dots, f_m) df_I \wedge \sum_J b_J(f_1, \dots, f_m) df_J = \\ &= f^*\varphi \wedge f^*\psi \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^* \varphi &= \sum_I a_I((f \circ g)_1, \dots, (f \circ g)_m) d(f \circ g)_I \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \\
&= \sum_I a_I(f_1(g_1, \dots, g_n), \dots, f_m(g_1, \dots, g_n)) df_I \circ dg = \\
&= g^* \left(\sum_I a_I(f_1, \dots, f_m) df_I \right) = \\
&= g^* f^*(\varphi) \quad \square
\end{aligned}$$

Proposition 4

Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, d.h. eine 0-Form

$$\Rightarrow dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dx_i$$

Beweis: $\forall p \in \mathbb{R}^n \forall v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned}
dg|_p(v) &= dg|_p \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n v_i dg|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) dx_i|_p(v) = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) dx_i|_p \left(\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \underbrace{dx_i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) \quad \square
\end{aligned}$$

Allgemein: Sei $\omega = \sum_I a_I dx_I$ eine k-Form auf \mathbb{R}^n

Definition:

$d\omega := \sum_I da_I \wedge dx_I$ ist (k+1)-Form auf \mathbb{R}^n . $d\omega$ heißt äußeres Differential oder äußere Ableitung von ω .

Beispiel:

$$\omega = xyz dx + yz dy + (x+z) dx$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d\omega &= d(xyz) \wedge dx + d(yz) \wedge dy + d(x+z) \wedge dx = \\
&= yz dx \wedge dx + xz dy \wedge dx + xy dz \wedge dx + \\
&+ z dy \wedge dy + y dz \wedge dy + dx \wedge dx + dz \wedge dx = \\
&= -xz dx \wedge dy - (xy+1) dx \wedge dz - y dy \wedge dz
\end{aligned}$$

Proposition 5

- (a) φ_1, φ_2 k-Formen
 $\Rightarrow d(\varphi_1 + \varphi_2) = d\varphi_1 + d\varphi_2$
- (b) $\varphi = k$ -Form, $\psi = l$ -Form
 $\Rightarrow d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge d\psi$
- (c) $dd\varphi = 0$
- (d) $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diffbar, $\varphi = k$ -Form $\Rightarrow d(f^*\varphi) = f^*d\varphi$

Beweis:

zu (a) $\varphi_1 = \sum_I a_I dx_I, \quad \varphi_2 = \sum_I b_I dx_I$

$$d(\varphi_1 + \varphi_2) = d\left(\sum_I (a_I + b_I) dx_I\right) = \sum_I d(a_I + b_I) \wedge dx_I = \sum_I (da_I + db_I) \wedge dx_I =$$

$$= d\left(\sum_I a_I \wedge dx_I\right) + d\left(\sum_I b_I \wedge dx_I\right) = d\varphi_1 + d\varphi_2$$

zu (b) $\varphi = \sum_I a_I dx_I, \quad \psi = \sum_J a_J dx_J$

$$\Rightarrow \varphi \wedge \psi = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J$$

$$\Rightarrow d(\varphi \wedge \psi) =$$

$$= \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J =$$

$$= \left(\sum_I da_I \wedge dx_I\right) \wedge \sum_J b_J dx_J + (-1)^k \sum_I a_I dx_I \wedge \sum_J db_J \wedge dx_J =$$

$$= d\varphi \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge d\psi$$

zu (c)

1. Fall: $\varphi = 0$ -Form, also $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$

$$d(d\varphi) \stackrel{\text{Prop 4}}{=} d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx_j\right) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \stackrel{\text{Prop 4}}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_j =$$

$$= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0$$

2. Fall: $\varphi = \sum_I a_I dx_I$ k-Form

wegen (a) o.B.d.A. $\varphi = a(x) dx_I$ mit $a \neq 0$

$$d\varphi = d(a dx_I) \stackrel{(b)}{=} da \wedge dx_I + (-1)^0 a d dx_I$$

Nun ist $d dx_I = d(1 dx_I) = d1 \wedge dx_I = 0$

$$\Rightarrow dd\varphi = d(da \wedge dx_I) \stackrel{(b)}{=} \underbrace{dda \wedge dx_I}_{=0 \text{ nach Fall 1}} + (-1)^0 da \wedge \underbrace{d dx_I}_{=0} = 0$$

zu (d)

1. Fall $\varphi = 0$ -Form $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n(y_1, \dots, y_n)$

$$\begin{aligned} f^*d\varphi &\stackrel{\text{Prop 4}}{=} f^* \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(f_1, \dots, f_n)}{\partial y_i} df_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(f_1, \dots, f_n)}{\partial y_i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(f_1, \dots, f_n)}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_j = \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial (\varphi \circ f)}{\partial x_j} dx_j = d(\varphi \circ f) = d(f^*\varphi) \end{aligned}$$

2. Fall $\varphi = \sum_I a_I dx_I$ k -Form

$$\begin{aligned} d(f^*\varphi) &= d \left(\sum_I f^*(a_I) f^*(dx_I) \right) = \sum_I d(f^*(a_I)) \wedge f^*dx_I = \\ &\stackrel{1.\text{Fall}}{=} \sum_I f^*da_I \wedge f^*dx_I \stackrel{\text{Prop 3(1)}}{=} f^* \left(\sum_I da_I \wedge dx_I \right) = f^*(d\varphi) \end{aligned}$$

§ 15 Differentialformen und Vektorfelder auf Mfkt.

Sei $M =$ diffbare Mf $p \in M$

$T_pM = \{[\dot{\alpha}(0)] \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \alpha(0) = p\} \simeq \mathbb{R}^n$

$f : M \rightarrow N$ diffbare Abb.

$$df_p = T_p f : \begin{cases} T_pM \rightarrow T_{f(p)}N \\ [\dot{\alpha}(0)] \mapsto [(f \circ \alpha)(0)] \end{cases}$$

das Differential der Abbildung f in p .

Definition:

Eine k -Form auf M ist eine Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} M \rightarrow \bigcup_{p \in M} \text{Alt}^k(T_pM) \\ p \mapsto \varphi|_p = \varphi|_p(v_1, \dots, v_k) \end{cases}$$

Sei $f : M \rightarrow N$ diffbare Abbildung diffbarer Mannigfaltigkeiten

k -Formen kann man mittels f zurückziehen.

Sei $\psi = k$ -Form auf N .

Definition:

$$f^*\psi|_p(v_1, \dots, v_k) := \psi|_{f(p)}(df_p(v_1) \dots df_p(v_k)) \quad p \in M, v_1, \dots, v_k \in T_p M$$

Also $f^*\psi|_p \in \text{Alt}^k(T_p M) \forall p$, d.h. $f^*\psi = k$ -Form auf M

Sei $U \subset M$ offen und $x : \begin{cases} U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n \\ p \mapsto x(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \end{cases}$ eine diffebare Karte.

$\Rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ die kanonischen Koordinaten von $V \subset \mathbb{R}^n$ (d.h. $\forall x \in V$ ist $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$)

Jede Differentialform vom Grad k auf $V \subset \mathbb{R}^n$ läßt sich eindeutig schreiben als

$$\sum_I a_I dx_I = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_k) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

mit a_I diffebar auf V .

Da $x : U \rightarrow V$ diffebare Abbildung von Mfk., so ist $x^*(\sum a_I dx_I)$ eine k -Form auf U .

Nach Definition ist $\forall p \in M \quad \forall v_1, \dots, v_k \in T_p U :$

$$x^* \left(\sum_I a_I dx_I \right) (v_1, \dots, v_k) := \sum_I a_I(x) dx_I|_{x(p)} (dx|_p(v_1), \dots, dx|_p(v_k))$$

Diese k -Form bezeichnet man kurz als:

$$\sum a_I dx_I = \sum a_I(x) dx_I$$

Man identifiziert U mit V mittels x in dieser Bezeichnung