Korollar 1.

(1) Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig

$$\Rightarrow \int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

(2) Sei $Q = \{x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \forall\, i = 1, \dots n\}$,
$f : Q \to \mathbb{R}$ stetig
$\Rightarrow$ Die iterierten Integrale exisiteren und es gilt:

$$\int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots x_n)\mathrm{d}x_1 \dots\right)\mathrm{d}x_{n-1}\right)\mathrm{d}x_n$$

Beispiel 1.

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$$

$$f : \begin{cases} Q \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^y := \begin{cases} e^{y \ln x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

f ist auf Q stetig

$$\begin{aligned} \int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y) &= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^1 x^y \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_1^2 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_1^2 \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = [\ln(y+1)]_1^2 = \ln(\frac{3}{2}) \end{aligned}$$

Beispiel 2.

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ 2 \leq z \leq 4\}$$

$$f : \begin{cases} Q \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto x + y + z \end{cases} \quad \text{stetig auf } Q$$

$$
\begin{aligned}
\int_Q f(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_2^4 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 (x+y+z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_2^4 \left(\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}+yx+zx\right]_0^2 \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_2^4 \left(\int_0^1 (2+2y+2z)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_2^4 (3+2z)\mathrm{d}z = 18
\end{aligned}
$$

§2 Das Riemann-Integral auf beschränkten Mengen in $\mathbb{R}^n$

Definition 1.

(1) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion

$$
f_M := \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{falls } x \notin M \end{cases} \end{cases}
$$

heißt Erweiterung von f durch 0.

(2)

$$
\chi_M : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in M \\ 0 & \text{falls} \quad x \notin M \end{cases} \end{cases}
$$

heißt charakteristische Funktion von M.

M beschränkt $\Leftrightarrow \exists$ Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset Q$.

Definition 2. $Q(M) := \bigcap\limits_{M \subset Q} Q =$ kleinster (abgeschlossener) Quader in $\mathbb{R}^n$, der M enthält.

Definition 3. $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f : M \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$\begin{aligned}
\int_{*M} f(x)\mathrm{d}x &:= \int_{*Q(M)} f_M(x)\mathrm{d}x = \text{unteres (Riemann-)Integral} \\
\int_M^* f(x)\mathrm{d}x &:= \int_{Q(M)}^* f_M(x)\mathrm{d}x = \text{oberes (Riemann-)Integral}
\end{aligned}$$

Offenbar gilt:

(1)
$$\int_Q^* f_M(x)\mathrm{d}x = \int_{Q(M)}^* f(x)\mathrm{d}x \;\forall\, Q \text{ mit } Q \subset Q(M)$$

(2)
$$\int_{*M} f(x)\mathrm{d}x \le \int_M^* f(x)\mathrm{d}x$$

(3)
$$\begin{aligned}
\int_{*M} f(x)\mathrm{d}x + \int_{*M} g(x)\mathrm{d}x &\le \int_{*M} (f(x)+g(x))\mathrm{d}x \\
&\overset{(2)}{\le} \int_M^* (f(x)+g(x))\mathrm{d}x \le \int_M^* f(x)\mathrm{d}x + \int_M^* g(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Beweis der 1. Ungleichung (von (3)). Sei $Q \supset M$ und $P = \{Q_1, \dots Q_m\}$ Partition von Q
Offenbar ist $(f+g)_M = f_M + g_M$

$$\inf_{Q_k} (f+g)_M = \inf_{Q_k} (f_m + g_m) \ge \underline{S}_P(f_M + g_M) \ge \underline{S}_P(f_M) + \underline{S}_P(g_M)$$

Nach Definition des Supremums existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition P von Q, s.d.

$$\begin{aligned}
\int_{*Q} f_M(x)\mathrm{d}x - \underline{S}_P(f_M) &\le \varepsilon \\
\text{und } \int_{*Q} g_M(x)\mathrm{d}x - \underline{S}_P(g_M) &\le \varepsilon \\
\Rightarrow \int_{*Q} (f_M(x) + g_M(x))\mathrm{d}x &\ge \underline{S}_P(f_M) + \underline{S}_P(g_M) \ge \int_{*Q} f_M(x)\mathrm{d}x + \int_{*Q} g_M(x)\mathrm{d}x - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Da das $\forall\, \varepsilon > 0$ gilt $\Rightarrow$ Behauptung
3. Ungleichung analog. $\square$

Lemma 1.

(1) $\displaystyle\int_{*M} c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_{*M} f(x)\mathrm{d}x \;\forall\, c \geq 0$

(2) $\displaystyle\int_M^* c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_M^* f(x)\mathrm{d}x \;\forall\, c \geq 0$

Beweis: klar

Lemma 2.

(1) $\displaystyle\int_{*M} (-f(x))\mathrm{d}x = -\int_M^* f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_M^* (-f(x))\mathrm{d}x = -\int_{*M} f(x)\mathrm{d}x$

Beweis.

- zu (1):
  gilt: $(-f)_M = -f_M$
  aber $\inf\limits_{Q_k} (-f_M) = -\sup\limits_{Q_k} f_M$
  Sei P Partition von $Q(M)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{S}_P(-f_M) &= \sum_{k=1}^{m} \inf_{Q_k} (-f_M(x))\mu(Q_k) \\ &= -\sum_{k=1}^{m} \sup_{Q_k} (f_M)\mu(Q_k) = -\overline{S}_P(f_M) \end{aligned}$$

- zu (2):

$$\int_M^* (-f(x))\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} -\int_{*M} (-(-f(x)))\mathrm{d}x = -\int_{*M} f(x)\mathrm{d}x$$

$\square$

Lemma 3. $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt $f, g : M \to \mathbb{R}$ beschränkt
Annahme: $f(x) \le g(x) \; \forall \, x \in M$

(1) $\displaystyle \int_{*M} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{*M} g(x)\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle \int_M^* f(x)\mathrm{d}x \le \int_M^* g(x)\mathrm{d}x$

Beweis. für (1) ((2) analog):
Sei $P = \{P_1, \dots P_m\}$ Partition von $Q(M)$

$$\underline{S}_P(f_M) = \sum_{i=1}^m \inf_{x \in Q_i} f(x) \cdot \mu(Q_i) \le \sum_{i=1}^m \inf_{x \in Q_i} g(x) \cdot \mu(Q_i) = \underline{S}_P(g_M)$$

$$\Rightarrow \int_{*M} f(x)\mathrm{d}x = \sup_P \underline{S}_P(f_M) \le \sup_P \underline{S}_P(g_M) = \int_{*M} g(x)\mathrm{d}x$$

□

Lemma 4. Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$
Sei $f : M_1 \cup M_2 \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{*M_1} f\mathrm{d}x + \int_{*M_2} f\mathrm{d}x &\overset{(1)}{\le} \int_{*M_1 \cup M_2} f\mathrm{d}x \\ &\overset{(2)}{\le} \int_{*M_1} f\mathrm{d}x + \int_{M_2}^* f\mathrm{d}x \\ &\overset{(3)}{\le} \int_{M_1 \cup M_2}^* f\mathrm{d}x \overset{(4)}{\le} \int_{M_1}^* f\mathrm{d}x + \int_{M_2}^* g\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Beweis.

$$\text{Sei } f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in M_1 \\ 0 & x \notin M_1 \end{cases} \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} f(x) & x \in M_2 \\ 0 & x \notin M_2 \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist $f_{M_1 \cup M_2} = f_1 + f_2$

- zu (1):

$$\int_{*\,M_1} f\mathrm{d}x + \int_{*\,M_2} f\mathrm{d}x = \int_{*\,M_1\cup M_2} f_1\mathrm{d}x + \int_{*\,M_1\cup M_2} f_2\mathrm{d}x$$
$$\underset{(Bem.3)}{\leq} \int_{*\,M_1\cup M_2} (f_1+f_2)\mathrm{d}x = \int_{*\,M_1\cup M_2} f\mathrm{d}x$$

- zu (2):

$$\begin{aligned}\int_{*\,M_1\cup M_2} f\mathrm{d}x &= \int_{*\,Q(M_1\cup M_2)} f_{M_1\cup M_2}\mathrm{d}x \\ &= \int_{*\,M_1\cup M_2} (f_1+f_2)\mathrm{d}x + \int_{*\,M_1\cup M_2} (-f_2(x))\mathrm{d}x - \int_{*\,M_1\cup M_2} (-f_2(x))\mathrm{d}x \\ &\overset{(Bem.3)}{\underset{Lemma}{\leq}} \int_{*\,M_1\cup M_2} f_1\mathrm{d}x + \int_{M_1\cup M_2}^{*} f_2(x)\mathrm{d}x = \int_{*\,M_1} f_1\mathrm{d}x + \int_{M_2}^{*} f_2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

- (3) und (4) analog

□

Definition 4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f : M \to \mathbb{R}$ beschränkt.
f heißt (Riemann-)integrierbar auf M

$$\Leftrightarrow \int_{*\,M} f\mathrm{d}x = \int_{M}^{*} f\mathrm{d}x$$

gilt: Ist f intbar auf M, so gilt für jeden Quader $Q \supset M$:

$$\int_M f\mathrm{d}x = \int_Q f_M\mathrm{d}x$$

Satz 1 (Riemannsches Integrabilitätskriterium).
f auf M intbar $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \exists$ Partition von $Q(M)$, s.d.

$$\overline{S}_P(f_M) - \underline{S}_P(f_M) < \varepsilon$$

Beweis. f auf M integrierbar $\Leftrightarrow f_M$ auf $Q(M)$ intbar
$\overset{\S 1 Lemma3}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0 \exists$ Partition P von $Q(M)$, s.d.

$$\overline{S}_P(f_M) - \underline{S}_P(f_M) < \varepsilon$$

□

Proposition 1. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar und $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot f$ integrierbar auf M und es gilt:

$$\int_M c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_M f(x)\mathrm{d}x$$

Beweis.

(1) $c \geq 0$: Behauptung folgt aus Lemma (1)

(2) $c < 0$:

$$\int_{*\atop M} (-f)\mathrm{d}x = -\int^{*}_{M} f\mathrm{d}x = -\int_{*\atop M} f\mathrm{d}x = \int^{*}_{M} (-f)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_M -f\mathrm{d}x \exists$$

$$(1) \Rightarrow \int_M c \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_M (-|c|)f(x)\mathrm{d}x = -|c| \int_M f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_M f(x)\mathrm{d}x$$

$\square$

Proposition 2. Seien f und $g : M \to \mathbb{R}$ integrierbar
$\Rightarrow f + g : M \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt:

$$\int_M (f+g)\mathrm{d}x = \int_M f\mathrm{d}x + \int_M g\mathrm{d}x$$

Beweis.

$$\int_{*\atop M} f\mathrm{d}x + \int_{*\atop M} g\mathrm{d}x \leq \int_{*\atop M} (f+g)\mathrm{d}x \leq \int^{*}_{M} (f+g)\mathrm{d}x \leq \int^{*}_{M} f\mathrm{d}x + \int^{*}_{M} g\mathrm{d}x$$

$\square$

Proposition 3. $f, g : M \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $f \leq g \Rightarrow \int_M f\mathrm{d}x \leq \int_M g\mathrm{d}x$.

Beweis. folgt aus Lemma (3). $\square$