

WIEDERHOLUNG: Sei $M = M^n$ eine diffbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$.

$$T_p M = \{[\dot{\alpha}(0)] \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ diffbar}, \alpha(0) = p\}$$

$f : M \rightarrow N$ diffb. Abb.

$$df|_p : \begin{cases} T_p M & \rightarrow & T_{f(p)} N \\ [\dot{\alpha}(0)] & \mapsto & [(f \circ \alpha)(0)] \end{cases} \quad \text{Bild kommt noch}$$

\mathbb{R} -VR - Homomorphismus,
das Differential von f in p

Def. :

Eine k -Form auf M ist eine Abb.

$$p : \begin{cases} M & \longrightarrow & \bigcup_{p \in M} \text{Alt}^k(T_p M) \\ p & \longmapsto & \varphi|_p = \varphi|_p(v_1, \dots, v_k) \end{cases}$$

Sei $f : M \rightarrow N$ diffbar und ψ eine k -Form auf N .

Def. :

$$(f^* \psi)|_p(v_1, \dots, v_k) := \psi|_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k))$$

$f^* \psi$ ist k -Form auf M .

Sei $U \subset M$ offen, $x : \begin{cases} U & \rightarrow & V \subset \mathbb{R}^n \\ p & \mapsto & x(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p)) \end{cases}$ eine diffbare Karte.

$\Rightarrow x_1, \dots, x_n$ sind die kanonischen Koordinaten von $V \subset \mathbb{R}^n$ (d.h. $\forall x \in V$ ist $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$)

Auf V hat jede Differentialform vom Grad k die Gestalt:

$$\sum_I a_I dx_I = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

mit $a_I = a_{i_1 \dots i_k} : V \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar (∞ -oft diffbar)

$x : U \rightarrow V$ ist eine diffbare Abbildung von Mfkt. $\Rightarrow x^*(\sum_I a_I dx_I)$ ist eine k -Form auf U .

$$x^*\left(\sum_I a_I dx_I\right)_p(v_1, \dots, v_k) := \sum_I a_I(x) dx_I|_{x(p)}(dx|_p(v_1), \dots, dx|_p(v_k))$$

Diese k -Form wird kurz mit $\sum_I a_I(x) dx_I$ bezeichnet.

(Man identifiziert U mit V mittels x in dieser Bezeichnung)

ENDE DER WIEDERHOLUNG

Def. :

Eine k -Form $\varphi : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} \text{Alt}^k(T_p M)$ heißt Differentialform vom Grad k oder differenzierbare k -Form, falls \exists Atlas $\mathcal{A} = \{x^\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in I}$, s.d. gilt:

$$\varphi|_{U_\alpha} = \sum_I a_I(x^\alpha) dx_I^\alpha$$

mit differenzierbaren $a_I : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R} \forall \alpha$

z.z. : Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karten x^α

Sei $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $U := U_\alpha \cap U_\beta$

$$x := x^\alpha|_U : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n \quad V = V(x_1, \dots, x_n)$$

$$y := x^\beta|_U : U \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^n \quad V' = V(y_1, \dots, y_n)$$

Sei $g : \begin{cases} V & \rightarrow & V' \\ x & \mapsto & y = g(x) \end{cases}$ der Kartenwechsel

Da k -Formen von 1-Formen erzeugt werden (d.h. jede k -Form ist von der Form

$\sum_i \alpha_i \varphi_1^i \wedge \dots \wedge \varphi_k^i$ mit 1-Formen φ_ν^i), genügt es, die Behauptung für 1-Formen zu zeigen.

Also genügt z.z. : Ist $\varphi = x^* \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i \right) = y^* \left(\sum_{i=1}^n b_i(y) dy_i \right)$ mit $a_i : V \rightarrow \mathbb{R}$, $b_i : V' \rightarrow \mathbb{R}$, so ist a_i genau dann differenzierbar, wenn b_i differenzierbar ist.

Da die Situation symmetrisch ist, genügt es zu zeigen: sind b_i differenzierbar, so auch a_i .

Beweis :

Es gilt $\forall p \in U, \forall v \in T_p U = T_p M$:

$$x^* \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i \right) \Big|_p(v) = \sum_{i=1}^n a_i(x(p)) dx_i \Big|_{x(p)}(dx \Big|_p(v))$$

$$y^* \left(\sum_{j=1}^n b_j(y) dy_j \right) \Big|_p = g^* \left(x^* \left(\sum_{j=1}^n b_j(y) dy_j \right) \right) = x^* \left(\sum_{j=1}^n b_j(g(x)) d((g \circ x)_j) \right) =$$

$$\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} x^* \left(\sum_{j=1}^n b_j(g(x)) \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) dx_i \right) = x^* \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_j(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \right) dx_i \right)$$

$$\Rightarrow a_i(x) = \sum_{j=1}^n b_j(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)$$

b_i diffbar, g diffbar $\Rightarrow a_i$ diffbar

□

Damit gelten alle Ergebnisse und Begriffe für Differentialformen auf \mathbb{R}^n auch auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (im Folgenden sind k -Formen also immer differenzierbare k -Formen bzw. Differentialformen vom Grad k).

Im Einzelnen:

Proposition 1 :

Sei $\omega = k$ -Form, $\varphi = l$ -Form, $\psi = m$ -Form auf M

$$(1) \quad \omega \wedge (\varphi + \psi) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \psi, \text{ falls } l = m$$

$$(2) \quad \omega \wedge \varphi = (-1)^{kl} \varphi \wedge \omega$$

$$(3) \quad (\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$$

Proposition 2 :

Sei $f : M \rightarrow N$ eine diffbare Abbildung diffbarer Mannigfaltigkeiten, $\varphi, \psi = k$ -Formen auf N , $g = 0$ -Form auf N

$$(1) \quad f^*(\varphi + \psi) = f^*\varphi + f^*\psi$$

$$(2) \quad f^*(g \cdot \varphi) = f^*g \cdot f^*\varphi$$

$$(3) \quad \text{Sind } \omega_1, \dots, \omega_k \text{ 1-Formen auf } N, \text{ so ist}$$

$$f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) = (f^*\omega_1) \wedge \dots \wedge (f^*\omega_k)$$

Proposition 3 :

Sei $g : P \rightarrow M$ eine diffbare Abbildung diffbarer Mannigfaltigkeiten, φ, ψ Differentialformen auf N , $f : M \rightarrow N$

$$(1) \quad f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*\varphi \wedge f^*\psi$$

$$(2) \quad (f \circ g)^*\varphi = f^*g \cdot f^*\varphi$$

Ist φ eine k -Form auf M mit $\varphi|_U = \sum_I a_I dx_I$, wobei $x : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte ist, so ist $d\varphi$ eine $(k + 1)$ -Form mit

$$d\varphi|_U = \sum_I da_I \wedge dx_I$$

Proposition 4 (vgl. §14 Proposition 5) :

- (a) φ_1, φ_2 k -Formen auf $M \Rightarrow d(\varphi_1 + \varphi_2) = d\varphi_1 + d\varphi_2$
- (b) $\varphi = k$ -Form, $\psi = l$ -Form $\Rightarrow d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge d\psi$
- (c) $d(d\varphi) = 0$
- (d) $\varphi = k$ -Form auf $N \Rightarrow d(f^*\varphi) = f^*d\varphi$

Def. :

Ein Vektorfeld auf einer diffbaren Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung

$$X : \begin{cases} M & \longrightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M \\ p & \longmapsto x(p) \in T_p M \end{cases}$$

Sei $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar (d.h. \forall Karten $x : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ ist $\varphi \circ x^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar).
 $v = X(p) \in T_p M \Rightarrow v(\varphi) := (T_p(\varphi))(v) \in \mathbb{R} =$ Richtungsableitung von φ in Richtung v .

Hierbei ist $T_p \varphi = d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R} = \mathbb{R}$ das Differential von φ in p .

Ist X ein Vektorfeld(VF) auf M , so ist

$$X_\varphi : \begin{cases} M & \rightarrow \mathbb{R} \\ p & \mapsto X(p)(\varphi) \end{cases} \quad \text{eine Funktion.}$$

Def. :

Ein VF X auf M heißt differenzierbar, wenn für jede differenzierbare Funktion $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion X_φ differenzierbar ist. Ist $U \subset M$ eine offene Untermannigfaltigkeit, so ist analog diffbares VF auf U definiert.

Ist $x : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte, so ist $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ein VF auf $U \forall i = 1, \dots, n$.

In jedem Punkt $p \in U$ sind $\{\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \mid i = 1, \dots, n\}$ eine Basis des VR $T_p U = T_p M$.

\Rightarrow Jedes VF $X : U \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$\forall p \in U \quad X(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \quad \alpha_i(p) \in \mathbb{R}$$

Also: $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ mit Funktionen $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$

Proposition 5 (vgl. §14 Proposition 6) :

Äquivalent sind für ein VF $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ auf $U \subset M$

- (1) X diffbar
- (2) a_i diffbar $\forall i = 1, \dots, n$

Beweis :

(1) \Rightarrow (2): X diffbar \Leftrightarrow für alle diffbaren $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist $X\varphi$ diffbar.

Nun sind die Koordinatenfunktionen $x_j = x_j(p)$ diffbar.

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (x_j) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j$$

(2) \Rightarrow (1): Sei $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ diffbar.

z.z. $X\varphi$ diffbar.

$$X\varphi = \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (\varphi) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

$$\varphi \text{ (}\infty\text{-oft) diffbar} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ diffbar} \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ diffbar} \Rightarrow X\varphi \text{ diffbar.}$$

□