§16 Partition der Eins, orientierte Mannigfaltigkeiten

Satz 3: Für eine diffbare Mfk. $M = M^n$ sind äquivalent

(1) M ist orientierbar

(2) $\exists$ auf M nirgends verschwindende Differentialform ω vom Grad n

ω heißt Volumenform.

Beweis von $2 \Rightarrow 1$: Sei ω Volumenform auf M und $x : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M (Œ sei U zusammenhängend).

Auf U ist $\omega|_U$ von der Form $a(x) \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ mit $a \in \mathscr{C}^\infty(U)$ und $a(x(p)) \neq 0$ $\forall p \in U$. Da U zusammenhängend und $a \neq 0$ auf ganz U, ist $a > 0$ oder $a < 0$ auf ganz U. Falls $a < 0$, ersetze x_1 durch $-x_1$ ($\Rightarrow a > 0$).

Damit haben wir einen Atlas von M, s.d. $\forall$ Karten x^α von $U_\alpha \to V_\alpha$ gilt:

$$\omega_\alpha|_{U_\alpha} = a_\alpha(x^\alpha) \cdot \mathrm{d}x_1^\alpha \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n^\alpha$$

mit $a_\alpha > 0$.

Behauptung: Dieser Atlas ist orientiert.
Beweis: Seien $x^\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $x^\beta : U_\beta \to V_\beta$ zwei Karten dieses Atlas.
$g_{\alpha\beta} : x^\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x^\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \omega &= a_\alpha \cdot \mathrm{d}x_1^\alpha \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n^\alpha \\
&= g_{\alpha\beta}^*(a_\beta \cdot \mathrm{d}x_1^\beta \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n^\beta) \\
&= g_{\alpha\beta}^*(a_\beta) \cdot g_{\alpha\beta}^*(\mathrm{d}x_1^\beta \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n^\beta) \\
&= a_\beta \circ g_{\alpha\beta}^* \cdot \det(\mathrm{d}g_{\alpha\beta}) \cdot (\mathrm{d}x_1^\alpha \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n^\alpha) \quad \text{(Lemma)}
\end{aligned}$$

Also $a_\alpha(x) = a_\beta(g_{\alpha\beta}(x)) \cdot \det(\mathrm{d}g_{\alpha\beta})$. Also $\det(\mathrm{d}g_{\alpha\beta}) > 0$.

□

Korollar: Eine zusammenhängende diffbare Mannigfaltigkeit hat keine oder genau zwei Orientierungen. Definiert die Volumenform ω eine Orientierung, so definiert $-\omega$ die andere.

Beweis: Ein ω bestimmt eine eindeutige Orientierung. Zwei Volumenformen ω_1, ω_2 bestimmen genau dann dieselbe Orientierung, wenn $\omega_1 = f \cdot \omega_2$ mit $f : M \to \mathbb{R}^+$.

Ist ω eine feste Volumenform auf M, so gilt für alle Differentialformen $\tilde{\omega}$ vom Grad n: $\tilde{\omega} = g \cdot \omega$ mit $g : M \to \mathbb{R}$ diffbar. $\tilde{\omega}$ ist Volumenform auf M, wenn $g \neq 0$. Also folgt aus $\tilde{\omega}$ VF sofort $g > 0$ oder $g < 0$ auf ganz M.

Im 1. Fall definiert $\tilde{\omega}$ dieselbe Orientierung wie ω, im 2. - dieselbe Orientierung wie $-\omega$.

□

Definition: Sei $f : M \to N$ diffbare Abbildung von diffbaren Mannigfaltigkeiten mit Volumenformen ω_M und ω_N. Angenommen, $\dim M = \dim N = \mathrm{rg}_p f \quad \forall p \in M$. Dann gilt $f^*\omega_M = \lambda\, \omega_N$ mit $\lambda \in \mathscr{C}^\infty(M)$, $\lambda \neq 0$ auf ganz M. f heißt *orientierungstreu* (bzw. *orientierungsumkehrend*), falls $\lambda > 0$ (bzw. $\lambda < 0$) auf ganz M.

Satz 4: Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine diffbare Abbildung vom Rang $k = m - n > 0$. Sei 0 ein regulärer Wert von f, also $M := f^{-1}(0)$ ist diffbare Mannigfaltigkeit der Dimension k.
$\Rightarrow M$ besitzt eine von f bestimmte Volumenform und damit eine Orientierung.

Bemerkung: Damit sind alle Nullstellenmengen unabhängiger Gleichungen orientierbar.

Beispiel: Die Kugeloberfläche $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ mit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \quad \mathbb{R}^1 \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 \end{cases}$$

ist orientierbar.

Beweis: $\mathbb{R}^m$ besitzt die Volumenform $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m$.

Die Inklusion $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ induziert die Inklusion

$$\mathrm{T}_p\, M \hookrightarrow \mathrm{T}_p\, \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$$

und es ist $\mathrm{T}_p\, M = \{v \in \mathbb{R}^n | <\mathrm{grad}\, f_i\,, v> = 0\}$. Auf M ist eine Volumenform ω definiert:

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = \det(\mathrm{grad}\, f_1, \ldots, \mathrm{grad}\, f_n, v_1, \ldots, v_k).$$

□

§17 Integration von Differentialformen

Sei zunächst $M = \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei ω eine Differentialform auf U.

Definition:

$$\operatorname{supp}\omega := \overline{\left\{p \in U \middle| \omega|_p \neq 0\right\}} = \textit{Träger von } \omega.$$

Sei ω eine n-Form auf U, also $\omega = a(x) \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ mit $a \in \mathscr{C}^\infty(U)$.

Definition: Angenommen der Träger von ω: $K = \operatorname{supp}\omega$ ist kompakt in U:

$$\int_U \omega := \int_K a(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \text{Übliches Integral auf } \mathbb{R}^n.$$

Sei M eine beliebig orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n, ω eine n-Form. Setze voraus, dass $K := \operatorname{supp}\omega$ kompakt ist.

Erster Fall: Es existiert eine Karte $x : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ mit $K \subseteq U$.
Definiere $\int_M \omega := \int_U \omega := \int_V a(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$.

<u>Behauptung</u>: Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Karte ab.
<u>Beweis</u>: Sei $y : U \to V' \subset \mathbb{R}^n$ eine weitere Karte, etwa $\omega = b(y) \cdot \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n$.
Zu zeigen: $\int_V a(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_{V'} b(y)\,\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n$. Sei $g = y \circ x^{-1}$ der Kartenwechsel.

Zusammenhang $a(x)\,\mathrm{d}x$, $b(y)\,\mathrm{d}y$: $x^*(a(x)\,\mathrm{d}x) = \omega|_U = y^*(b(y)\,\mathrm{d}y)$.

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow a(x)\,\mathrm{d}x &= (x^{-1})^* \circ y * (b(y)\,\mathrm{d}y)\\ &= g^*(b(y)\,\mathrm{d}y)\\ &= b(g(x)) \cdot \det(\,\mathrm{d}g(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{mit Lemma}\end{aligned}$$

Es folgt $a(x) = b(g(x)) \cdot \det(\,\mathrm{d}g(x))$.
Mit der Transformationsformel sieht man:

$$\int_V b(g(x))\,|\det(\,\mathrm{d}g(x))|\,\mathrm{d}x = \int_{V'} b(y)\,\mathrm{d}y.$$

Nun ist M orientiert, d. h. $\det(\,\mathrm{d}g(x)) > 0$. Daraus folgt

$$\int_M \omega = \int_{V'} b(y)\,\mathrm{d}y = \int_V b(g(x))\det(\,\mathrm{d}g(x))\,\mathrm{d}x = \int_V a(x)\,\mathrm{d}x.$$

Es folgt die Behauptung.

$\square$

Zweiter, allgemeiner Fall: Sei $M = M^n$ orientierbare diffbare Mannigfaltigkeit der Dimension n, ω eine diffbare n-Form auf M mit $\operatorname{supp}\omega$ kompakt. Sei $\mathfrak{A} = \{x^\alpha : V_\alpha \leftarrow U_\alpha\}$ diffbarer Atlas von M. Nach §16 Satz 2 existiert eine $\{U_\alpha | \alpha \in I\}$ untergeordnete Partition der 1, d. h. $\varphi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$, $\sum_{\alpha\in I}\varphi_\alpha(x) = 1$ etc. $\Rightarrow$ $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha\omega) \subset U_\alpha$ $\forall\alpha$.

Definition: Nach dem ersten Fall ist $\int_M \varphi_\alpha\omega$ definiert. Definiere nun

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha\in I}\int_M \varphi_\alpha\omega.$$

Behauptung:

Diese Definition hängt nicht ab von der Wahl des Atlanten $\mathfrak{A}$ und der Partition φ_α.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}'$ ein weiterer Atlas: $\mathfrak{A}' = \{y_\beta : U'_\beta \to V'_\beta \subset \mathbb{R}\}$ und $\{\psi_\beta | \beta \in I'\}$ eine dieser Überdeckung untergeordnete Partition der Eins.

Dann ist $\left\{U_\alpha \cap U'_\beta \middle| \alpha \in I, \beta \in I'\right\}$ eine Überdeckung von M und $\{\varphi_\alpha\psi_\beta\}$ ist eine dieser Überdeckung untergeordnete Partition der Eins, denn $\sum_{\alpha,\beta}\varphi_\alpha\psi_\beta(x) = 1$, und damit

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in I}\int_M \varphi_\alpha\omega &= \sum_{\alpha\in I}\int_M \varphi_\alpha \underbrace{\left(\sum_{\beta\in I'}\psi_\beta\right)}_{=1} = \sum_{\alpha,\beta}\int_M \varphi_\alpha, \psi_\beta\omega \\ &= \sum_{\beta\in I'}\int_M \psi_\beta \underbrace{\left(\sum_{\alpha\in I}\varphi_\alpha\right)}_{=1} \omega = \sum_{\beta\in I'}\int_M \psi_\beta\omega\end{aligned}$$

Bemerkung 1: Sei M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω irgendeine diffbare n-Form. Dann ist $\int\limits_M \omega$ wohldefiniert, denn aus M kompakt und $\operatorname{supp}\omega$ abgeschlossen in M folgt: $\operatorname{supp}\omega$ ist auch kompakt.

Bemerkung 2: Wichtig für die Definition des Integrals war richtige Transformation beim Koordinatenwechsel. Dieses Transformationsverhalten haben gerade n-Formen. Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ lassen sich i.A. nicht integrieren.