Proposition 1 :

Sei $M_1 \cap M_2 = \emptyset, M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ und $f : M_1 \cup M_2 \to \mathbb{R}$
Ann.: $f|M_1$ und $f|M_2$ integrierbar und es gilt:

$$\int\limits_{M_1 \cup M_2} f(x)dx = \int\limits_{M_1} f(x)dx + \int\limits_{M_2} f(x)dx$$

Bew.: folgt aus Lemma (oben).

Definition :

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ dann ist

$$\begin{aligned} f^+ \quad &:= \begin{cases} M & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} f(x) \\ 0 \end{cases} \text{falls} \begin{matrix} f(x) \geq 0 \\ f(x) < 0 \end{matrix} \end{cases} \\ f^- \quad &:= \begin{cases} M & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} -f(x) \\ 0 \end{cases} \text{falls} \begin{matrix} f(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{matrix} \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad f = f^+ - f^- \text{ und } |f| = f^+ + f^- \end{aligned}$$

Lemma 1 :

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Rightarrow f^+$ und f^- integrierbar. Bew.:
(1) (für f^+) Sei $P = P_1, ..., P_m$ beliebige Partition von $Q(M)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \quad &\leq \quad \overline{S}_P(f^+) - \underline{S}_P = \sum_{i=1}^{m} (sup_{Q_i} f^+ - inf_{Q_i} f^+)\mu(Q_i) \\ &\leq \quad \sum_{i=1}^{m} (sup_{Q_i} f - inf_{Q_i} f)\mu(Q_i) = \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) \end{aligned}$$

Riemannsches Integrabilitätskriterium $\Rightarrow$ Beh.
(2) (f^-) $f^- = (-f)^+ \Rightarrow$ Beh.

Korollar 1 :

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Rightarrow |f| : M \to \mathbb{R}$ integrierbar.
Bew.: $|f| = f^+ - f^-$

Korollar 2 :

Sei $f, g : M \to \mathbb{R}$ integrierbar $\Rightarrow fg : M \to \mathbb{R}$ integrierbar.
Bew.: Wörtlich wie in Analysis I.

§3 Jordan-meßbare Mengen im $\mathbb{R}^n$

Sei $Q = Q(a, b) \subset \mathbb{R}^n$ Quader.
Es war definiert:
$\mu(Q) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i) = \int\limits_Q 1dx = \int\limits_{Q'} \mathcal{X}_Q dx$ für jeden Quader Q' mit $Q \subset Q'$.

Definition :

Sei $M \subset \mathbb{R}$ beliebige beschränkte Menge und $\mathcal{X}_M : M \to \mathbb{R}$ integrier auf M.
Dann heißt M (Jordan-)meßbare Menge und $\mu(M) := \int\limits_M \mathcal{X}_M(x)dx = \int\limits_M 1dx$
heißt das Volumen oder das Maß von M.

Proposition 1 :

Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-meßbar mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow M_1 \cup M_2$
Jordan-meßbar und es gilt: $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$
Bew.: $\mathcal{X}_{M_1}$ und $\mathcal{X}_{M_2}$ integrierbar auf M_1 bzw. $M_2 \Rightarrow \mathcal{X}_{M_1}$ und $\mathcal{X}_{M_2}$
integrierbar auf $M_1 \cup M_2$
$\Rightarrow \mathcal{X}_{M_1 \cup M_2} = \mathcal{X}_{M_1} + \mathcal{X}_{M_2}$ ist integrierbar auf $M_1 \cup M_2$ und es gilt:

$$\mu(M_1 \cup M_2) = \int\limits_{M_1 \cup M_2} \mathcal{X}_{M_1} + \mathcal{X}_{M_2} dx = \int\limits_{M_1} \mathcal{X}_{M_1} dx + \int\limits_{M_2} \mathcal{X}_{M_2} dx = \mu(M_1) + \mu(M_2)$$

Lemma 1 :

Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ meßbar mit $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_2 \setminus M_1$ meßbar und es gilt $\mu(M_2 \setminus M_1) = \mu(M_2) - \mu(M_1)$

Bew.: Es gilt $M_1 \cap (M_2 \setminus M_1) = \emptyset$ und $M_1 \cup (M_2 \setminus M_1) = M_2$ Aus Bemerkung (2) und (3) des Lemmas aus §2 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_{*_{M_2}} \mathcal{X}_{M_2} &\leq \int_{*_{M_1}} \mathcal{X}_{M_1} + \int^*_{M_1\setminus M_2} \mathcal{X}_{M_2\setminus M_1} dx \\ &\leq \int^*_{M_2} \mathcal{X}_{M_2} dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(M_2) \leq \mu(M_1) + \int^*_{M_1\setminus M_2} \mathcal{X}_{M_2\setminus M_1} dx \leq \mu(M_2)$$

Bei Vertauschung der Mengen liefert dieselbe Ungleichung

$$\int_{*_{M_2}} \mathcal{X}_{M_2} \leq \int_{*_{M_1\setminus M_2}} \mathcal{X}_{M_2\setminus M_1} dx + \int^*_{M_1} \mathcal{X}_{M_1} \leq \int^*_{M_2} \mathcal{X}_{M_2} dx$$

oder

$$\mu(M_2) \leq \int_{*_{M_1\setminus M_2}} \mathcal{X}_{M_2\setminus M_1} dx + \mu(M_1) \leq \mu(M_2)$$

$$\Rightarrow \int_{*_{M_1\setminus M_2}} \mathcal{X}_{M_2\setminus M_1} dx = \int^*_{M_1\setminus M_2} \mathcal{X}_{M_2\setminus M_1} dx$$

$\Rightarrow M_2 \setminus M_1$ J-meßbar und es gilt nach Lemma1 $\mu(M_2) - \mu(M_1) = \mu(M_2 \setminus M_1)$

Definition :

$$M \subset \mathbb{R}^n \text{ heißt Jordan-Nullmenge} \Leftrightarrow \begin{array}{l}(1) M = \text{ Jordan-meßbar} \\ (2) \mu(M) = 0\end{array}$$

Satz 1 :

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und M ganz enthalten in einer Hyperebene $H_j(c) \Rightarrow \mu(M) = 0$ Hyperebene $H_j(c) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_j = c\} c \in \mathbb{R}$ Bew.:
Wähle Konstante $K > 0$, s.d. $M \subset Q := \{x \in \mathbb{R}^n || x_i| \leq K \forall i = 1, \cdots, n\}$
$\Rightarrow$ für jedes $\varepsilon > 0$ ist M enthalten in Quadern
$Q_\varepsilon := \{(x_1, \cdots, x_n\} \in \mathbb{R}^n || x_i| \leq K \forall i \neq j, c - \varepsilon \leq x_j \leq c + \varepsilon\}$

$$\Rightarrow \int_M^* \mathcal{X}_M dx = \int_{Q_\varepsilon}^* \mathcal{X}_M dx \leq \int_{Q_\varepsilon} \mathcal{X}_{Q_\varepsilon} dx = (2K)^{n-1} 2\varepsilon$$

Da ε beliebig $> 0 \Rightarrow$

$$0 \leq \int_{*M} \mathcal{X}_M dx \leq \int_M^* \mathcal{X}_M dx \leq (2K)^{n-1} 2\varepsilon \Rightarrow$$

Beh.

Offenbar: Sei M Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ und $N \subset M \Rightarrow N =$Nullmenge

Definition :

Sei $M \subset \mathbb{R}$

(1) :

$x \in M$ heißt innerer Punkt von $M \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.d. $K_\varepsilon(x) \subset M$
$M_0 := \{x \in M | x$ innerer Punkt von $M\}$ =offener Kern von M.

(2) :

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt von $M \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ gilt $K_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$ und $K_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$
$\partial M = \{$Randpunkte von $M\}$ = Rand von M

(3) :

$\overline{M} = M_0 \cup \partial M$ =abgeschlossene Hülle von M

Satz 2 :

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann gilt M =J-meßbar $\Leftrightarrow$ ∂M =J-Nullmenge Bew.:
„$\Leftarrow$“ Sei ∂M =Nullmenge dann gilt: $Q(M) \supseteq Q(\partial M)$
$\forall \varepsilon > 0 \exists$ Partition $P = \{P_1, \cdots, P_M\}$ von $Q(M)$ mit $\overline{S}_P(\mathcal{X}_{\partial M}) \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_M^* \mathcal{X}_M dx - \int_{*M} \mathcal{X}_M dx &\leq \overline{S}_P(\mathcal{X}_M) - \underline{S}_P(\mathcal{X}_M) \\
&= \sum_{k=1}^m \sup_{Q_k}(\mathcal{X}_M)\mu(Q_k) - \sum_{k=1}^m \inf_{Q_k}(\mathcal{X}_M)\mu(Q_k) \\
&= \sum_{Q_k \cup M \neq \emptyset} \mu(Q_k) - \sum_{Q_k \subset M} \mu(Q_k) \\
&\leq \sum_{Q_k \cup M \neq \emptyset} \mu(Q_k) = \overline{S}_P(\mathcal{X}_{\partial M}) < \varepsilon \Rightarrow \int_{*M} \mathcal{X}_M dx = \int_M^* \mathcal{X}_M dx
\end{aligned}$$

„$\Rightarrow$“ Sei M meßbar zu $\varepsilon > 0 \exists$ Partition $P = \{P_1, \cdots, P_M\}$ von $Q(M)$ mit
$\overline{S}_P(\mathcal{X}_M) - \underline{S}_P(\mathcal{X}_M) \leq \varepsilon$
$\partial M = M_1 \cup M_2$ mit

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{x \in \partial M | x \notin \bigcup_{Q_k \subset M} Q_k\} \\
M_2 &:= \partial M \setminus M_1
\end{aligned}$$

Die Punkte von M_2 liegen auf dem Rand von Quadern von P.
$\Rightarrow M_2 \subset \bigcup\{$endlich vielen Hyperebenen$\}$
Satz 3 $\Rightarrow \mu(M_2) = 0$ ferner:

$$\int_{M_1}^* \mathcal{X}_{M_1} dx \leq \overline{S}_P(\mathcal{X}_{M_1}) \leq \sum_{Q_k \cup M \neq \emptyset} \mu(Q_k) - \sum_{Q_k \subset M} \mu(Q_k) = \overline{S}_P(\mathcal{X}_M) - \underline{S}_P(\mathcal{X}_M) \leq \varepsilon$$

$\partial M = M_1 \cup M_2$ mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ damit folgt aus Lemma §2

$$\int_{\partial M}^* \mathcal{X}_{\partial M} dx \leq \int_{M_1}^* \mathcal{X}_{\partial M} dx + \int_{M_2}^* \mathcal{X}_{\partial M} dx = \int_M^* \mathcal{X}_{M_1} dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int\limits_{*\,\partial M} \mathcal{X}_{\partial M} dx \leq \int\limits_{\partial M}^{*} \mathcal{X}_{\partial M} dx < \varepsilon \Rightarrow \partial M = \text{Nullmenge}$$

Korollar 1 :

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-meßbar $\Rightarrow M_0$ und $\overline{M}$ J-meßbar und es gilt:

$$\mu(M) = \mu(M_0) = \mu(\overline{M})$$

Bew.:
(1) $\overline{M} = M \cup \partial M = M \cup (\partial M \setminus M) \Rightarrow \partial M \setminus M$ ist Nullmenge da
$\partial M \setminus M \subset \partial M$ und
Satz 4 $\Rightarrow \overline{M}$ meßbar und $\mu(\overline{M}) = \mu(M) + \mu(\partial M \subset M) = \mu(M)$
(2) $M_0 = \overline{M} \subset \partial M \Rightarrow \mu(M_0) = \mu(\overline{M}) - \mu(\partial M) = \mu(\overline{M})$

Satz 3 :

Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ meßbar $\Rightarrow M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2$ meßbar und es gilt:

$$\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1 \cap M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$$

Bew.:
$\partial(M_1 \cap M_2) \subset \partial M_1 \cap \partial M_2 \Rightarrow \partial(M_1 \cap M_2) = \text{Nullmenge}$
Aus Satz 4 $\Rightarrow M_1 \cap M_2$ meßbar
$M_1 \cup M_2 = M_1 \cup (M_2 \setminus (M_1 \cap M_2))$

$$\begin{aligned} \text{Nach Lemma 2} \quad &\Rightarrow \quad M_2 \setminus (M_1 \cap M_2)\text{meßbar} \\ \text{Lemma 1} \quad &\Rightarrow \quad M_1 \cup M_2\text{meßbar und es gilt:} \end{aligned}$$

$$\mu(M_1 \cup M_2) \overset{=}{L1}\ \mu(M_1) + \mu(M_2 \setminus (M_1 \cap M_2)) \overset{=}{L2}\ \mu(M_1) + \mu(M_2) - \mu(M_1 \cap M_2)$$

Definition :

Sei $f : M \to N$ Abbildung, dann heißt $\Gamma_f := \{(x, y) \in M \times N | y = f(x)\}$
Graph von f.

Satz 4 :

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : M \to \mathbb{R}^m$ stetig $\Rightarrow \Gamma_f$ ist Nullmenge in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

Bew.:

$f = (f_1, \cdots, f_m), f_i : M \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow f_i$ auf M gleichmäßig stetig.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ Partition $P = \{Q_1, \cdots, Q_l\}$ von $Q(M)$ s.d. $\forall i = 1, \cdots, m$ gilt

$$|f_i(x') - f_i(x'')| \leq \varepsilon \forall x', x'' \in M \cap Q_k \forall k$$

d.h. $\Gamma_f \cap (Q_k \times \mathbb{R}^m) \subset Q_k \times \widetilde{Q}_{2\varepsilon}$

mit $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ und $Q_k \times \widetilde{Q}_{2\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^n || y_i| \leq \varepsilon \forall i\}$

$$\Rightarrow \int^*\limits_{\Gamma_f \cap (Q_k \times \mathbb{R}^m)} \mathcal{X}_{\Gamma_f} d(x,y) \leq \mu(Q_k)\mu(\widetilde{Q}_{2\varepsilon}) = \mu(Q_k)(2\varepsilon)^m$$

$$\Rightarrow \int^*\limits_{\Gamma_f \cap (Q_k \times \mathbb{R}^m)} \mathcal{X}_{\Gamma_f} d(x,y) \leq \sum_{k=1}^{l} \int\limits_{\Gamma_f} \mathcal{X}_{\Gamma_f} d(x,y) \leq \sum_{k=1}^{l} \mu(Q_k)(2\varepsilon)^m \leq \mu(Q(M))(2\varepsilon)^m$$

Da ε beliebig $\Rightarrow \int^*\limits_{\Gamma_f} \mathcal{X}_{\Gamma_f} d(x,y) = 0$