§3 Jordan-messbare Mengen im $\mathbb{R}^n$ (Fortsetzung)

Beispiel

$$n\text{-dimensionale Vollkugel: } K_c(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq c \right\}$$

$$\partial K_c(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c = 0 \right\}$$

Mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - c$:

$$\Rightarrow \partial K_c(0) = P\left(\Gamma_f \cap \{(x, y) \in \Gamma_f | y = 0\}\right)$$

wobei $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Falls der Rand einer Menge Durchschnitt von Graphen ist, so ist die Menge messbar.

Prinzip von Cavalieri

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $M \subset Q = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i \leq x_i \leq b_i \forall i\}$. Angenommen, $\forall \xi \in [a_n, b_n]$ sei die Menge

$$M_\xi^{(n)} := M \cap \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = \xi\}$$

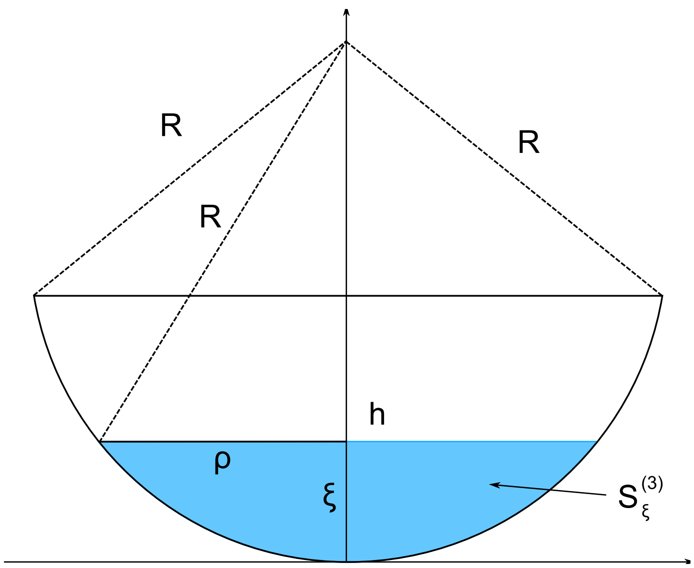
messbar in $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$. $\Rightarrow \mu(M) = \int_{a_n}^{b_n} \mu(M_\xi^{(n)})\, \mathrm{d}\xi$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \mu(M) &= \int_{Q(M)} \chi_M(x)\, \mathrm{d}x = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \chi_M \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-1} \right) \mathrm{d}x_n \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \mu(M_\xi^{(n)})\, \mathrm{d}xi \end{aligned}$$

□

Beispiel: Bestimme das Volumen des Kugelsegments S der Höhe h mit Radius r:



Mit Pythagoras gilt

$$\mu(S_\xi^{(3)}) = \pi\rho^2 = \pi(R^2 - (R-\xi)^2)) = \pi(2R\xi - \xi^2) \quad (0 \leq \xi \leq h)$$

Über Satz von Cavalieri

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \int_0^h \mu(S_\xi^{(3)})\,\mathrm{d}\xi = \int_0^h \pi(2R\xi - \xi^2)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \pi\left(Rh^2 - \frac{1}{3}h^3\right) \end{aligned}$$

Zum Überprüfen: Volumen der Vollkugel $\pi(4R^3 - \frac{8}{3}R^3) = \frac{4}{3}R^3\pi$ $\Rightarrow$OK.

§4 Mittelwertsätze und Substitutionsregel

<u>1. MWS</u>: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f : M \to \mathbb{R}$ int'bar ($\Rightarrow M$ messbar!) Dann $\exists \eta$ mit $\inf_M f \leq \eta \leq \sup_M f$, so dass

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = \eta \cdot \mu(M)$$

<u>Beweis</u>: Offensichtlich

$$\inf_M f \leq f(x) \leq \sup_M f \quad \forall x \in M$$

$$\inf_M f \cdot \mu(M) \leq \underbrace{\int_M f(x)\,\mathrm{d}x}_{\eta\cdot\mu(M)} \leq \sup_M f \cdot \mu(M)$$

mit $\eta \in [\inf_M f; \sup_M f]$. $\square$

Erweiterter MWS: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $f, g : M \to \mathbb{R}$ int'bar; ferner sei $g(x) \geq 0$ $\forall x \in M$. Dann $\exists \eta$ mit $\inf_M f \leq \eta \leq \sup_M f$, so dass gilt:

$$\int_M f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \eta \int_M g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis:

$$\inf_M f \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq \sup_M f \cdot g(x)$$

$$\Rightarrow \inf_M f \cdot \int_M g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_M f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \leq \sup_M f \cdot \int_M g(x)\,\mathrm{d}x$$

Ist $\int_M g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, so gilt die Behauptung $\forall \eta$. Ist $\int_M g(x)\,\mathrm{d}x > 0$, so setze

$$\eta = \frac{\int_M f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_M g(x)\,\mathrm{d}x}$$

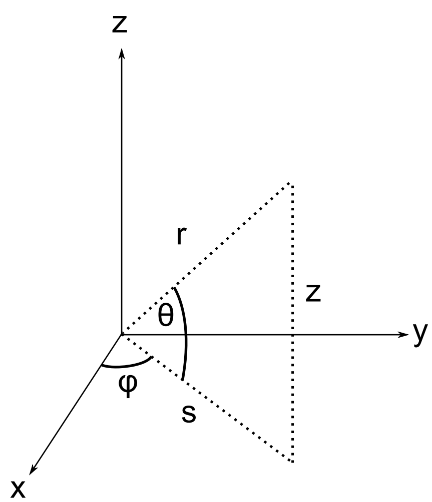
$\square$

Definition: Sei $\tilde{S}$ offen in $\mathbb{R}^n$. Eine bijektive Abbildung

$$g : \tilde{S} \to S; (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

heißt Koordinatentransformation, falls $g \in \mathcal{C}^1(\tilde{S})$ und $\det\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\tilde{x}}\right)(x) \neq 0$.
Bemerkung: Dann folgt sofort $g^{-1} \in \mathcal{C}^1(S)$.
Beispiel 1: Polarkoordinaten
$\tilde{S} = \{(r, \varphi) | 0 < r < \infty; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$; $S = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_0^+; 0)$.
Beh.: $g : \tilde{S} \to S; (r; \varphi) \mapsto (x, y)$ mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ist eine Koordinatentransformation.
Bew.: g ist bijektiv. $g \in \mathcal{C}^1$.

$$\det\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}(r, \varphi)}\right) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi, & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi, & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r > 0$$



Beispiel 1: Sphärische Polarkoordinaten

$$x = s\cos\varphi = r\cos\varphi\cos\theta$$
$$y = s\sin\varphi = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$z = r\sin\theta$$
$$\tilde{S} = \{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3, r > 0, 0 < \varphi, 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$$
$$S = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) | x \geq 0, y = 0\}$$

Bew.: g ist bijektiv, $\in \mathcal{C}^1$.

$$\det\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}(r,\varphi,\theta)}\right) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix}$$
$$= r^2\cos\theta(\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta)$$
$$= r^2\cos\theta > 0$$

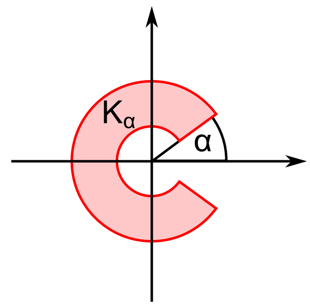
Substitutionsregel (= Transformationsformel)
Sei $K \subset S \subset \mathbb{R}^n$, K kompakt, S offen, $f : S \to \mathbb{R}$ stetig, $g : \tilde{S} \to S$ Koordinatentransformation.

$$\int_K f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(K)} f(g(\tilde{x}))\left|\det\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\tilde{x}}\right)\right|\,\mathrm{d}\tilde{x}$$

Beweis: Keiner. Siehe §7.

Bemerkung: Man beachte, dass die Funktionaldeterminante im Gegensatz zum eindimensionalen Fall nur im Betrag vorkommt.

Beispiel 1: Berechne $\int_K \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$, wo $K = \{(x,y) | 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. Um die Unstetigkeit der Kootrafo zum Umgehen, definiere K_α (siehe Bild). K_α kompakt und messbar.



$$\begin{aligned}\int_{K_\alpha} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{g^{-1}(K_\alpha)} r\cdot r\,\mathrm{d}(r,\varphi)\\ &= \int_\alpha^{2\pi-\alpha}\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{7}{3}\cdot 2\cdot(\pi-\alpha)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_K \sqrt{x^2+y^2} = \lim_{\alpha\to 0}\int_{K_\alpha} r\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{14}{3}\pi$$

Beispiel 2: Volumen des Kugeloktanten $K := \{(x,y,z)|x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$
$g^{-1}(\mathring{K}) = \{(r,\varphi,\theta)|0<r<1, 0<\theta<\frac{\pi}{2}, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\}$

$$\begin{aligned}\mu(K) = \int_K \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{g^{-1}(K)} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}(r,\varphi,\theta)\\ &= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$