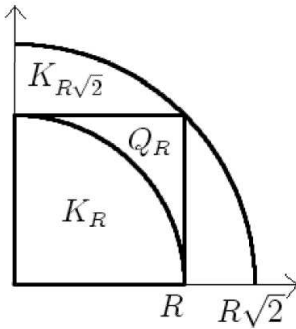


Beispiel 1.

Berechne $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$



$$\begin{aligned} K_R &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\} \\ Q_R &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\} \\ K_{R\sqrt{2}} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2R^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R e^{-r^2} r dr \right) d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} e^{-R^2} + \frac{1}{2} \right) d\phi = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-R^2} \end{aligned}$$

$$\text{Analog: } \int_{K_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-2R^2}$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &= \int_0^R \left(\int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \\ \Rightarrow \int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) &\leq \int_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \leq \int_{K_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-R^2}} &\leq \int_0^R e^{-x^2} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} e^{-2R^2}} \\ \downarrow R \rightarrow \infty & \qquad \qquad \qquad \downarrow R \rightarrow \infty \\ \sqrt{\frac{\pi}{4}} &\leq \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Anwendung: Schwerpunkte

Definition 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ meßbar, keine Nullmenge

$$(x_0, y_0, z_0) := \frac{1}{\mu(M)} \left(\int_M x d(x, y, z), \int_M y d(x, y, z), \int_M z d(x, y, z) \right)$$

heißt Schwerpunkt der Menge M .

Satz 1. Für den Schwerpunkt (x_0, y_0, z_0) von M gilt:

$$\int_M (x - x_0) d(x, y, z) = \int_M (y - y_0) d(x, y, z) = \int_M (z - z_0) d(x, y, z) = 0$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_M (x - x_0) d(x, y, z) &= \int_M x d(x, y, z) - \int_M x_0 d(x, y, z) \\ &= x_0 \mu(M) - x_0 \mu(M) = 0 \end{aligned}$$

□

Beispiel 2. Schwerpunkt des Kugeloktanten

$$K = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Hatten: $\mu(K) = \frac{\pi}{6}$

Transformation in Polarkoordinaten:

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\theta)$$

$$z = r \cdot \sin(\theta)$$

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \varphi, \theta)} = r^2 \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} \int_K x d(x, y, z) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cos \varphi \cos \theta \cdot r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot \cos^2 \theta d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} (\cos \theta \sin \theta + \theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

denn $\frac{1}{2}(\cos \theta \sin \theta + \theta)' = \frac{1}{2}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1) = \cos^2 \theta$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{\mu(K)} \int_K x d(x, y, z) = \frac{6}{\pi} \frac{\pi}{16} = \frac{3}{8}$$

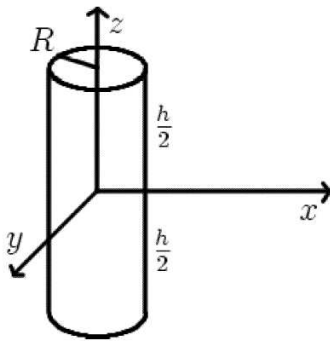
$$\Rightarrow \text{Schwerpunkt } K = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8} \right)$$

Anwendung: Trägheitsmoment**Definition 2.** Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ meßbar

$$I_x := \int_M (y^2 + z^2) d(x, y, z) = \text{Trägheitsmoment von } M \text{ bzgl. } x\text{-Achse}$$

Beispiel 3.

$$M_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\}$$

**Zylinderkoordinaten:**

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$\frac{d(x, y, z)}{d(r, \varphi, z)} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

$$\begin{aligned} I_x &= \int_M (x^2 + y^2) d(x, y, z) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r^3 dz d\varphi dr \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d\varphi dz = \frac{2\pi R^4}{4} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \frac{\pi R^4}{2} h \end{aligned}$$

§5 Flächen im \mathbb{R}^3

Sei $M \in \mathbb{R}^2$ offen und $f : \begin{cases} M & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{cases}$ einmal stetig differenzierbare Abbildung, s.d.

$$\text{rg} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

Dann heißt $F = \Im f$ eine (parametrisierte) Fläche in \mathbb{R}^3
 $f : M \rightarrow F \in \mathbb{R}^3$ Parameterdarstellung.

Beispiel 4.

$$M = \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} x(u, v) &= u \\ y(u, v) &= v \\ z(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg} = 2 \quad F = x\text{-}y\text{-Ebene}$$

Beispiel 5.

$$M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < \infty, 0 < v < 2\pi\}$$

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} x(u, v) &= u \cos v \\ y(u, v) &= u \sin v \\ z(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg} = 2$$

F ist längs der positiven x -Achse aufgeschlitzte (x, y) -Ebene

Beispiel 6.

$$M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq R\}$$

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} x(u, v) &= u \\ y(u, v) &= v \\ z(u, v) &= \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \end{pmatrix} \quad \text{rg} = 2$$

F ist obere Halbkugeloberfläche mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius R .

Satz 2. Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\tilde{k} : [a, b] \rightarrow M$ parametrisierte ebene Kurve \tilde{K}
 Sei $f : M \rightarrow F \subset \mathbb{R}^3$ parametrisierte Fläche in \mathbb{R}^3
 $\Rightarrow k = f \circ \tilde{k} : [a, b] \rightarrow K \subset \mathbb{R}^3$ ist parametrisierte Kurve im \mathbb{R}^3

Beweis. k einmal stetig diffbar, denn \tilde{k} und f sind es.
 zu zeigen: $k'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$

$$\text{Sei } \tilde{k}(t) = (u(t), v(t)), \quad f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\Rightarrow f_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \quad f_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k'(t) = f_u(u, v) \cdot u'(t) + f_v(u, v) \cdot v'(t)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Da } \tilde{k} \text{ parametrisierte Kurve } \Rightarrow (u'(t), v'(t)) \neq (0, 0) \\ \text{Da } f \text{ parametrisierte Fläche } \Rightarrow f_u, f_v \text{ linear unabhängig} \end{array} \right\} k'(t) \neq 0 \forall t$$

□

Hatten gesehen, dass $f_u(u, v)$ und $f_v(u, v)$ linear unabhängig sind $\forall (u_0, v_0)$

Definition 3. Die Ebene, die von $f_u(u_0, v_0)$ und $f_v(u_0, v_0)$ aufgespannt wird, heißt Tangentialebene $T_{f,P}$ von F im Punkt $f(u_0, v_0)$

Beh: Die Vektoren $f_u(u_0, v_0)$ $f_v(u_0, v_0)$ sind Tangentialvektoren von Kurven in F

Beweis. Betrachten $\tilde{k}(t) = (t, v_0) \quad t \in [u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon]$

$$\Rightarrow k'(\mu_0) = f_u(u_0, v_0) \cdot u'(0) + f_v(u_0, v_0) \cdot v'(0) = f_u(u_0, v_0)$$

□

Definition 4. Sei $f : M \rightarrow F \subset \mathbb{R}^3$ parametrisierte Fläche in \mathbb{R}^3 .

$$N(u_0, v_0) := \frac{f_u(u_0, v_0) \times f_v(u_0, v_0)}{\|f_u(u_0, v_0) \times f_v(u_0, v_0)\|}$$

heißt Normalenvektor von f an der Stelle $p = f(u_0, v_0)$.

$$\text{Hierbei: } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad x \times y = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

Ist $f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\text{Setzen } D_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$\text{so ist } N(u_0, v_0) = \frac{(D_x(u_0, v_0), D_y(u_0, v_0), D_z(u_0, v_0))}{\sqrt{(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2)}(u_0, v_0)}$$

Spezialfall: Sei $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktion

$\Rightarrow \Gamma_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = u, y = v, z = g(u, v)\}$ ist parametrisierte Fläche

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = -g_u \quad D_y = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -g_v \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$