§5 Flächen im $\mathbb{R}^3$ (Fortsetzung)

Oberflächenintegrale

Motivation der Definition

Sei $Q = Q((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \subseteq \mathbb{R}^2$ Rechteck,
$f : Q \to F \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisierte Fläche,
$P = \{Q_{ij}, i = 1 \dots m, j = 1 \dots n\}$ Partition von Q.
Ersetze das Bild F_{kl} des Quaders Q_{ij} durch ein Flächenstück der Tangentialebene (Parallelogramm) T_{kl} an $f(u_k, v_l)$: Das Parallelogramm T_{kl} wird aufgespannt von den Vektoren

$$f_u(u_{k-1}, v_{l-1}) \cdot (u_k - u_{k-1})$$
$$f_v(u_{k-1}, v_{l-1}) \cdot (v_k - v_{k-1})$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} T_{kl} &= \|f_u(\dots) \cdot (u_k - u_{k-1}) \times f_v(\dots) \cdot (v_k - v_{k-1})\| \\ &= (u_k - u_{k-1}) \cdot (v_k - v_{k-1}) \cdot \|f_u(\dots) \times f_v(\dots)\|\end{aligned}$$

$\Rightarrow$Annäherung an die Oberfläche ist die RIEMANNsche Summe

$$\sum_{k,l} \|f_u(u_{k-1}, v_{l-1}) \times f_v(u_{k-1}, v_{l-1})\| \cdot (u_k - u_{k-1}) \cdot (v_k - v_{k-1})$$

Läuft die Feinheit der Partition gegen 0, so geht diese Summe über in das Integral

$$\int_Q \|f_u(u, v) \times f_v(u, v)\| \, \mathrm{d}(u, v).$$

Definition des Oberflächenintegrals

Definition: Sei $f : M \to F \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisierte Fläche im $\mathbb{R}^3$. Dann heißt

$$\int_F \mathrm{d}\sigma = \int_M \|f_u(u, v) \times f_v(u, v)\| \, \mathrm{d}(u, v)$$

Flächeninhalt von F bezüglich der Parametrisierung f.

Beispiel: $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))^t$ mit $x = u$, $y = v$, $z = 2 - u^2 - v^2$; $M = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u^2 + v^2 \leq z\}$. ($F = \operatorname{Im} f$ ist eine Paraboloidhälfte.)

$$\begin{aligned} f_u &= (1, 0, -2u)^t \\ f_v &= (0, 1, -2v)^t \\ f_u \times f_v &= (2u, 2v, 1)^t \\ \Rightarrow \|f_u \times f_v\| &= \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \end{aligned}$$

Somit ist die Oberfläche

$$\int_F \mathrm{d}\sigma = \int_M \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\,\mathrm{d}(u,v)$$

Mit Polarkoordinaten $u = r \sin\varphi$ und $v = r \sin\varphi$:

$$\begin{aligned} \int_F \mathrm{d}\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{4} + r^2}\, r \,\mathrm{d}r \\ &= 4\pi \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + r^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4}{3}\pi \left[\left(\frac{9}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{26}{8} = \frac{26}{6}\pi \end{aligned}$$

Definition: Allgemein definiert man: Sei $f : M \to F \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisierte Fläche und $g : F \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt

$$\int_F g \,\mathrm{d}\sigma = \int_M g(f(u,v)) \cdot \|f_u(u,v) \times f_v(u,v)\| \,\mathrm{d}(u,v)$$

Oberflächenintegral von g über F (bzgl. Parametrisierung f).

Beispiel: Sei $f : M \to F \subseteq \mathbb{R}^3$ wie in obigem Beispiel und $g : F \to \mathbb{R}$; $g : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2$:

$$\begin{aligned} \int_F g \,\mathrm{d}\sigma &= \int_M (u^2 + v^2) \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\,\mathrm{d}(u,v) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Substituiert man $\rho := \sqrt{1+4r^2} \Leftrightarrow \rho\,\mathrm{d}\rho = 4r\,\mathrm{d}r$, so erhält man mit $r^2 = \frac{1}{4}(\rho^2-1)$ die Identität $r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{16}\rho(\rho^2-1)$, d. h.

$$\begin{aligned}\int_F g\,\mathrm{d}\sigma &= \frac{\pi}{8}\int_1^3 \rho^3 - \rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\pi}{8}\left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=1}^3 = 2\pi.\end{aligned}$$

§6 Integralsätze für das Riemann-Integral

Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $1 \le \nu \le n$ vereinbaren wie die Schreibweise

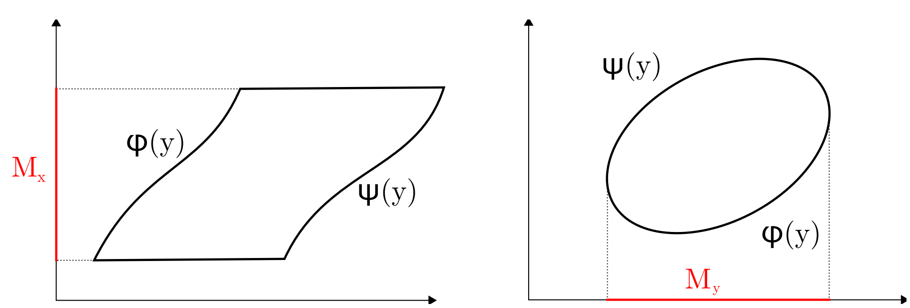
$$x^\nu := (x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Definition: (1) Eine JORDAN-messbare Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt projezierbar in Richtung der x_ν-Achse, wenn es im $(n-1)$-dimensionalen x^ν-Raum eine messbare Menge M_ν gibt, und stetig diffbare Funktionen $\varphi, \psi : M_\nu \to \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt:

$$\overline{M} = \bigcup_{x^\nu \in M_\nu} \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \varphi(x^\nu) \le x_\nu \le \psi(x^\nu)\}$$

(2) $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Standardbereich g. d. w. M projezierbar in Richtung der x_ν-Achse für alle ν.

Beispiele:



Links: projezierbar in x-Richtung, rechts: projezierbar in y-Richtung

Satz 1: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ projezierbar in Richtung der x_ν-Achse und $f : M \to \mathbb{R}$ intbar. Angenommen $\forall x^\nu \in M_\nu \ \exists \int_{\varphi(x_\nu)}^{\psi(x_\nu)} f(x)\,\mathrm{d}x_\nu$, dann gilt

$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{M_\nu}\left(\int_{\varphi(x_\nu)}^{\psi(x_\nu)} f(x)\,\mathrm{d}x_\nu\right)\mathrm{d}x^\nu$$

Beweis (nur für $n = 2$, allgemeiner Fall genauso): Annahmen: $M \subseteq \mathbb{R}^2$ projezierbar in Richtung der x-Achse; $f : M \to \mathbb{R}$ intbar. Existenz von $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ für alle $y \in M_x$.

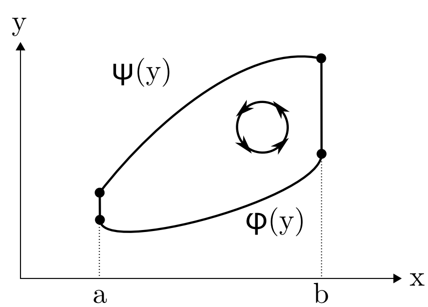
$$\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{M_x} \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$\square$

Integralsatz von Green: Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ offene Menge, die sich in endlich viele Standardbereiche zerlegen lässt, $V = (V_1, V_2)$ ein stetig diffbares Vektorfeld auf einer Umgebung von $\overline{M}$. Dann gilt

$$\int_M \left(\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x} \right) \mathrm{d}(x,y) = -\int_{\partial M} V_1\,\mathrm{d}x + V_2\,\mathrm{d}y$$

Hierbei soll der Rand so durchlaufen werden, dass das Innere immer zur linken Seite liegt.



Beweis: Es genügt, den Satz für einen Standardbereich zu zeigen: OE M Standardbereich. Wähle folgende explizite Parameterdarstellung $[0;4] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ des Randes ∂M:

$$x(t) = \begin{cases} a + t(b-a) & \text{für } 0 \le t < 1 \\ b & \text{für } 1 \le t < 2 \\ b - (t-2)(b-a) & \text{für } 2 \le t < 3 \\ a & \text{für } 3 \le t \le 4 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(a + t(b-a)) & \text{für } 0 \le t < 1 \\ \varphi(b) + (t-1)(\psi(b) - \varphi(b)) & \text{für } 1 \le t < 2 \\ \psi(b - (t-2)(b-a)) & \text{für } 2 \le t < 3 \\ \psi(a) - (t-3)(\psi(a) - \varphi(a)) & \text{für } 3 \le t \le 4 \end{cases}$$

Dann gilt mit Satz 1:

$$\begin{aligned}
\int_M \frac{\partial V_1}{\partial y}\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial V_1}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \big[V_1(x,\psi(x)) - V_1(x,\varphi(x))\big]\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b V_1(x,\psi(x))\,\mathrm{d}x - \int_b^a V_1(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_2^3 V_1(x(t),y(t))\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 V_1(x(t),y(t))\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

und da $x'(t) \equiv 0$ auf $(1;2) \cup (3;4)$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^4 V_1(x(t),y(t))\cdot x'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\partial S} V_1(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)
\end{aligned}$$

Analog lässt sich zeigen:

$$\int_M \frac{\partial V_2}{\partial x}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial S} V_2\,\mathrm{d}x$$

Der Satz folgt durch Subtraktion der beiden Gleichungen.