

Satz 2

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen konvex, $v : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ 2-mal stetig diffbar

Äquivalent sind:

- (1) v besitzt ein Potential
- (2) $\operatorname{rot} v = 0$

Def.: v besitzt ein Potential $\Leftrightarrow \exists \varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} \varphi = v$

Beweis:

(1) \Rightarrow (2): vgl. ÜA 20.a)

(2) \Rightarrow (1): Sei $\operatorname{rot} v = 0$ auf D

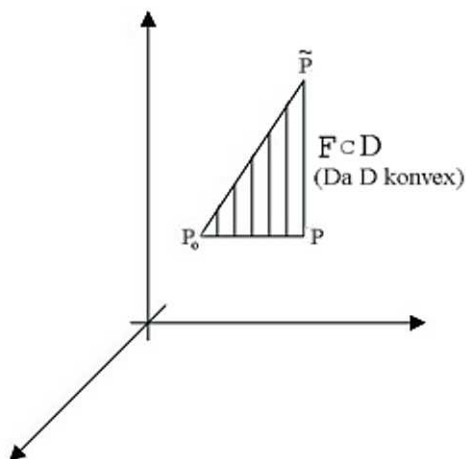
Sei $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ fest

Def.: $\varphi(P) := \int_{\overline{P_0 P}} (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz)$, $\overline{P_0 P}$ - Strecke von P_0 nach P

z.z.: $\operatorname{grad} \varphi \stackrel{\exists}{=} v$

Behauptung: Für $P, \tilde{P} \in D$ gilt:

$$\int_{\overline{P \tilde{P}}} (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = \varphi(\tilde{P}) - \varphi(P)$$



Satz von Stokes: $0 = \int_F \operatorname{rot} v \cdot N d\sigma =$
 $(\int_{\overline{P_0 P}} + \int_{\overline{P \tilde{P}}} + \int_{\overline{\tilde{P} P_0}}) (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) =$
 $\varphi(P) + \int_{\overline{P \tilde{P}}} (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) - \varphi(\tilde{P}) \Rightarrow$
 Beh.

Wähle $\tilde{P} = (x + h, y, z)$, $P = (x, y, z)$.

$$\frac{1}{h} (\varphi(x + h, y, z) - \varphi(x, y, z)) \stackrel{\text{Beh.}}{=} \frac{1}{h} \int_{\overline{P \tilde{P}}} (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz) = \frac{1}{h} \int_0^h v_1(x + t, y, z) dt =$$

$$v_1(x + \theta h, y, z), 0 \leq \theta \leq 1 \text{ nach MWS der Integralrechnung (An. I)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h, y, z) - \varphi(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} v_1(x + \theta h, y, z) = v_1(x, y, z)$$

Analog: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_2; \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_3$ □

§7 Beweis der Substitutionsregel

(vgl. Forster III)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}} \quad \text{Träger von } f$$

$$\mathcal{C}_C(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \mid \text{supp}(f) \text{ kompakt in } U\}$$

Beispiel: $U = \mathbb{E}$ (offener Einheitskreis), $f \equiv 1 \Rightarrow \text{supp}(f) = \mathbb{E}$

Also $f \equiv 1$ nicht in $\mathcal{C}_C(\mathbb{E})$, aber $f_{\mathbb{E}} \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^n)$

Substitutionsregel

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \rightarrow V$ Koordinatentransformation $f \in \mathcal{C}_C(U)$

$$\Rightarrow \int_U f(\varphi(x)) \cdot \left| \det \frac{d\varphi(x)}{dx} \right| dx = \int_V f(y) dy$$

Spezialfälle:

I. $n=1$: $f \in \mathcal{C}_C(V)$

Annahme: $\text{supp}(f) = [a, b] \subset V$

$\varphi : U \rightarrow V$ Koordinatentransformation.

Sei $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$.

2 Fälle:

(i) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \varphi^{-1}([a, b]) = [\alpha, \beta] = \varphi' > 0$

(ii) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \varphi^{-1}([a, b]) = [\beta, \alpha] = \varphi' < 0$ ($\frac{d\varphi}{dx}(x) = \varphi'(x) \in \mathbb{R}$)

Also:

$$\int_a^b f(y) dy = \int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)| dx = \begin{cases} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx & \text{im Fall (i)} \\ \int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx & \text{im Fall (ii)} \end{cases}$$

Alte Substitutionsregel:

$f : I = V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar, bijektiv mit $\varphi([c, d]) \subset I$

$$\Rightarrow \int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(y)dy$$

Im Fall (i) stimmen beide Formeln überein. Im Fall (ii) aber auch, denn:

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(x))|\varphi'(x)|dx = - \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))(-\varphi'(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

II. $\varphi(x) = Ax$ mit $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$

$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist Koordinatentransformation, denn $\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x$

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^t$ mit $\varphi_\nu(x) = \sum_{i=1}^n a_{\nu i}x_i \Rightarrow \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}(x) = a_{\nu\mu}$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dx}(x) = \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}(x) \right) = A$$

Substitutionsregel für lin. Abbildungen: $f \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^n)$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)|\det A|dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$$

Beweis: vgl. ÜA.

Vorbereitungen: Versehe \mathbb{R}^n mit Maximumsnorm

$$|x| := \max_{\nu=1}^n |x_\nu| \text{ für } x = (x_1, \dots, x_n)$$

Euklidische Norm:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^n x_\nu^2}$$

Für $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ sei

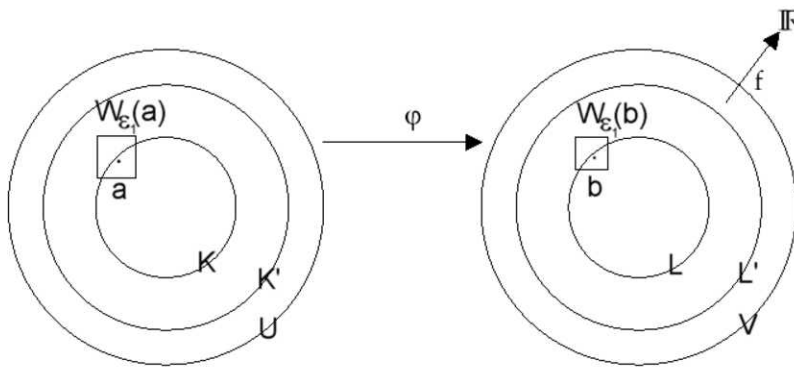
$W_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq \varepsilon\} =$ abg. Würfel um a mit Seitelänge 2ε

Für $f \in \mathcal{C}_C(U)$ bezeichne mit $f \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^n)$ auch die mit 0 fortgesetzte Funktion

Sei $L := \text{supp}(f) \subset V$ kompakt und $d(\partial V, L) > 0$
 $\Rightarrow K := \varphi^{-1}(L) \subset U$ kompakt und $d(\partial U, K) > 0$

$\exists \varepsilon_1 > 0$ und kompakte Mengen K', L' mit

- (1) $K \subset K' \subset U, L \subset L' \subset V$
- (2) $W_{\varepsilon_1}(a) \subset K' \forall a \in K, W_{\varepsilon_1}(b) \subset L' \forall b \in L$



Lemma 1: $\exists c > 0$, s.d.

- (1) $\left| \frac{d\varphi}{dx}(x) \cdot \xi \right| \leq c \cdot |\xi| \forall \xi \in \mathbb{R}^n \forall x \in K'$
- (2) $\left| \frac{d\varphi^{-1}}{dy}(y) \cdot \xi \right| \leq c \cdot |\xi| \forall \xi \in \mathbb{R}^n \forall y \in L'$

Beweis: $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} : K' \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, also beschränkt

$$\Rightarrow \exists c_{ij} > 0, \text{ s.d. } \left| \frac{d\varphi_i}{dx_j} \right| \leq c_{ij} \forall x' \in K'$$

$$\Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ ist } \left| \frac{d\varphi}{dx}(x) \cdot \xi \right| = \max_{i=1}^n \left| \left\langle \frac{d\varphi_i}{dx}, \xi \right\rangle \right| \leq \underbrace{\max_{i,j=1}^n c_{ij}}_{=: c_1} \cdot |\xi|$$

Analog: $\exists c_2$ mit $\left| \frac{d\varphi^{-1}}{dy}(y) \cdot \xi \right| \leq c_2 |\xi|$

Setze $c := \max(c_1, c_2)$ □

Lemma 2:

- (1) $\varphi(W_\varepsilon(x)) \subseteq W_{c \cdot \varepsilon}(\varphi(x)) \forall x \in K, \varepsilon \leq \varepsilon_1$ (c aus Lemma 1)
- (2) $\varphi^{-1}(W_\varepsilon(y)) \subseteq W_{c \cdot \varepsilon}(\varphi^{-1}(y)) \forall y \in L, \varepsilon \leq \varepsilon_1$ (c aus Lemma 1)

Beweis: MWS (für Abb. $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$) (vgl. An. II, §4) besagt:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \left(\int_0^1 \frac{d\varphi}{dx}(x_0 + t(x - x_0)) dt \right) \cdot (x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in U, \text{ s.d. } \overline{xx_0} \subset U$$

Sei $x_0 \in K$ und $x \in W_\varepsilon(x_0)$ ($\varepsilon \leq \varepsilon_1$)

Nach Wahl von K' ist $W_\varepsilon(x_0) \subset K' \subset U$

$$\Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \int_0^1 \left| \frac{d\varphi}{dx}(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) \right| dt \stackrel{L1}{\leq} \int_0^1 c |x - x_0| dt = c |x - x_0| \leq c \cdot \varepsilon$$

Also $x \in W_\varepsilon(x_0) \Rightarrow \varphi(x) \in W_{c\varepsilon}(\varphi(x_0))$

Analog (2) □

Lemma 3: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow \exists \psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton \nearrow mit $\lim_{t \searrow 0} \psi(t) = 0$, s.d. gilt:

$$|f(x) - f(x')| \leq \psi(\|x - x'\|) \quad \forall x, x' \in K$$

Beweis: f auf K stetig, K kompakt $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf K , d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, s.d. gilt:

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \forall x, x' \in K \text{ mit } \|x - x'\| < \delta$$

Def.: $\psi(\delta) := \sup_{\substack{x, x' \in K \\ \|x - x'\| < \delta}} \{|f(x) - f(x')|\}$

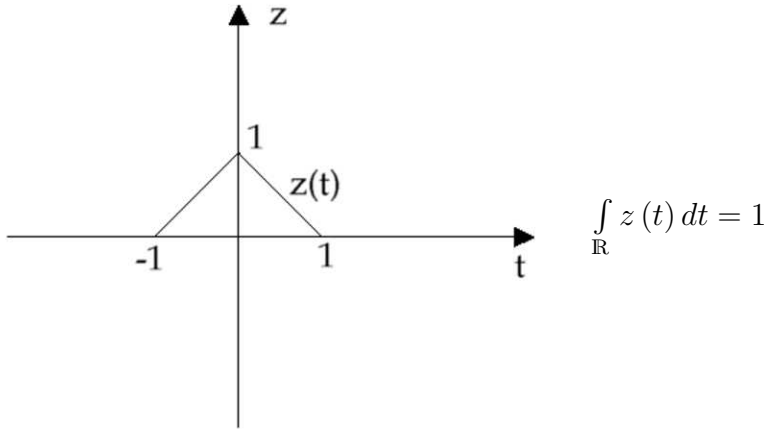
$\psi(\delta) \geq 0$ monoton wachsend, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \psi(\delta) = 0$ und:

$$|f(x) - f(x')| \leq \psi(\|x - x'\|) \quad \forall x, x' \in K$$

□

Zackenfunktionen: Definiere $z \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R})$ durch

$$z(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1 \end{cases}$$



$Z \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ sei definiert durch

$$Z(x_1, \dots, x_n) := z(x_1) \cdot \dots \cdot z(x_n)$$

$$\Rightarrow \text{supp}(Z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_\nu| \leq 1 \ \forall \nu = 1, \dots, n\} = W_1(0)$$

Lemma 4: $|Z(x) - Z(x')| \leq |x - x'| \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n$

Beweis: (Ind. nach n)

I. $n=1$: $\mathbb{E} |x - x'| \leq 1, \mathbb{E} x, x' \in [-1; 1]$

Aber dann ist $|z(x) - z(x')| \leq |x - x'|$

II. $n \mapsto n + 1$: $Z_n(x) = z(x_1) \cdot \dots \cdot z(x_n)$

$$\begin{aligned}
 |Z_{n+1}(x, x_{n+1}) - Z_{n+1}(x', x'_{n+1})| &= |Z_n(x) \cdot z(x_{n+1}) - Z_n(x') \cdot z(x'_{n+1})| = \\
 &= |Z_n(x) \cdot z(x_{n+1}) - Z_n(x) \cdot z(x'_{n+1}) + Z_n(x) \cdot z(x'_{n+1}) - Z_n(x') \cdot z(x'_{n+1})| \leq \\
 &\leq |Z_n(x) \cdot (z(x_{n+1}) - z(x'_{n+1}))| + |(Z_n(x) - Z_n(x')) \cdot z(x'_{n+1})| \stackrel{IA}{<} \\
 &< |x_{n+1} - x'_{n+1}| + n |x - x'| \leq |(x, x_{n+1}) - (x', x'_{n+1})| + \\
 &+ n \cdot |(x, x_{n+1}) - (x', x'_{n+1})| = (n + 1) |(x, x_{n+1}) - (x', x'_{n+1})| \quad \square
 \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$ sei $Z_\varepsilon \in \mathcal{C}_C(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$Z_\varepsilon(x) := Z_n\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Supp}(Z_\varepsilon) = W_\varepsilon(0)$$

$\forall a \in \mathbb{R}^n, x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|Z_\varepsilon(x - a) - Z_\varepsilon(x' - a)| = \left| Z\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right) - Z\left(\frac{x'-a}{\varepsilon}\right) \right| \stackrel{IA}{\leq} n \cdot \left| \frac{x-a}{\varepsilon} - \frac{x'-a}{\varepsilon} \right| = \frac{n}{\varepsilon} |x - x'|$$

Außerdem gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} Z_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} z\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \cdot \dots \cdot z\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} z\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) dx_i$$

$$\text{Subst. } y = \frac{x_i}{\varepsilon} \Rightarrow dy = \frac{1}{\varepsilon} dx_i \implies \int_{\mathbb{R}^n} Z_\varepsilon(x) dx = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} z(y) \varepsilon dy = \varepsilon^n$$