Approximation durch affine lineare Abbildungen:

$$\forall x_0 \in U \text{ sei } \lambda_{x_0} := \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto \quad \lambda_{x_0}(x) := \varphi(x_o) + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)(x - x_0) \end{cases}$$

(affin lineare Approximation von φ bei x_0)

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\Rightarrow} \varphi(x) - \lambda_{x_0} &= \varphi(x) - \varphi(x_0) - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)(x - x_0) \\ &\overset{(1)}{=} \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0 + t(x - x_0))\mathrm{d}t\right)(x - x_0) - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)\mathrm{d}t(x - x_0) \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0 + t(x - x_0)) - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)\mathrm{d}t\right)(x - x_0) \end{aligned}$$

Wendet man Lemma 3 auf die Komponenten von $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ an, so erhält man $\forall i, j$ eine monoton steigende Funktion $\Psi_{ij} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\lim\limits_{t \to 0} \Psi_{i,j}(t) = 0$, so dass

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_0 + t(x - x_0)) - \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_0)\right| \leq \Psi_{i,j}(||x_0 + t(x - x_0) - x_0||) \\ &\leq \Psi_{ij}(||x - x_0||) \leq \Psi(||x - x_0||) \qquad \text{mit } \Psi := \max\nolimits_{i,j} \Psi_{ij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall x_0 \in K \quad \forall x \in U \quad \text{mit } |x - x_0| \leq \varepsilon_1 \text{ ist}$$

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \lambda_{x_0}(x)| &\leq \int_0^1 \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0 + t(x - x_0)) - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)\right| \mathrm{d}t|x - x_0| \\ &\leq \int_0^1 \Psi(||x - x_0||)\mathrm{d}t(x - x_0) \leq \Psi(||x - x_0||)|x - x_0| \qquad (3) \end{aligned}$$

Lemma 5. Sei $\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon_1}{c} \Rightarrow \exists \Psi_1 : [0, \varepsilon_2] \rightarrow \mathbb{R}^*_+$ mit $\lim_{t \to 0} \Psi_1(t) = 0$ s.d. gilt:
$\forall a \in L,\ \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ gilt für $h(x) := Z_\varepsilon(x - a)$

$$\left|\int_U h(\varphi(x)) \left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right| \mathrm{d}x - \int_V h(y)\mathrm{d}y\right| \leq \Psi_1(\varepsilon) \cdot \varepsilon^n$$

Beweis. Sei $x_0 = \phi^{-1}(a) \quad \forall x \in U$ mit $|x - x_0| \leq \varepsilon_1$ gilt:

$$\begin{aligned} |h(\varphi(x)) - h(\lambda_{x_0}(x))| &\overset{(2)}{\leq} \frac{n}{\varepsilon}|\varphi(x) - \lambda_{x_0}(x)| \\ &\overset{(3)}{\leq} \frac{n}{\varepsilon}\Psi(||x - x_0||)|x - x_0| \end{aligned}$$

Andererseits hatten wir $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_2$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{supp}(Z_\varepsilon(\cdot - a) \circ \varphi) &\overset{L2(1)}{\leq} W_{c\varepsilon}(x_0) \subset W_{\varepsilon_1} \subset K' \\
\operatorname{supp}(Z_\varepsilon(\cdot - a) \circ \lambda_a) &\overset{L1(2)}{\leq} W_{c\varepsilon}(x_0) \subset W_{\varepsilon_1} \subset K'
\end{aligned}$$

$\forall x \in U$:

$$\begin{aligned}
|h(\varphi(x)) - h(\lambda_{x_0}(x))| &\leq \frac{n}{\varepsilon}\Psi(||x - x_0||)|x - x_0| \\
&\leq \frac{n}{\varepsilon}\Psi(c\varepsilon) \cdot c\varepsilon = nc\Psi(c\varepsilon)
\end{aligned}$$

Die Funktion $\begin{cases} K' & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)\right| \end{cases}$ ist gleichmäßig stetig.

L3 $\Rightarrow \exists\, \tilde{\Psi} \geq 0$ mit $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tilde{\Psi}(\varepsilon) = 0$ s.d.

$$\left|\left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)\right| - \left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x')\right|\right| \leq \tilde{\Psi}(||x - x'||) \quad \forall x, x' \in K$$

$\Rightarrow \forall x \in U$:

$$\begin{aligned}
& \left|h(\varphi(x))\left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)\right| - h(\lambda_{x_0}(x))\left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)\right|\right| \\
= & \left|h(\varphi(x))\left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)\right| - h(\varphi(x))\left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)\right|\right. \\
& \left. + h(\varphi(x))\left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)\right| - h(\lambda_{x_0}(x))\left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)\right|\right| \\
\leq & \; h(\varphi(x))\tilde{\Psi}(||x - x_0||) + \left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)\right| \cdot nc\Psi(c\varepsilon) \\
\leq & \; \Psi_2(\varepsilon) \quad \text{mit } \Psi_2 \text{ unabhängig von } x_0 \text{ mit } \lim_{\varepsilon \to 0} \Psi_2(\varepsilon) = 0
\end{aligned}$$

Andererseits nach Substitutionsregel für lineare Abbildungen (Aufgabe 21):

$$\begin{aligned}
& \int_U h(\lambda_{x_0}(x))\left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)\right| \mathrm{d}x = \int_V h(y)\mathrm{d}y \\
\Rightarrow & \left|\int_U h(\varphi(x))\left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)\right| \mathrm{d}x - \int_U h(\lambda_{x_0}(x))\left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x_0)\right| \mathrm{d}x\right| \\
& \leq \int_{W_{c\varepsilon}(x_0)} \Psi_2(\varepsilon)\mathrm{d}x = \Psi_2(\varepsilon) \cdot (2c\varepsilon)^n =: \Psi_1(\varepsilon)\varepsilon^n
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 6.

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} Z(x-p) = 1$$

(d.h. die Funktionen $\{Z(\cdot - p) \ | \ p \in \mathbb{Z}^n\}$ bilden eine Teilung der 1)

Lemma 7. Sei $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \forall \alpha > 0 \quad \exists \varepsilon > 0$ so dass $\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ gilt:

$$\left|\left| f - \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f(p\varepsilon) Z_\varepsilon(\cdot - p\varepsilon) \right|\right|_{\sup} \leq \alpha$$

(hierbei ist $||g||_{\sup} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$ Supremumsnorm)
Da f kompakten Träger hat, ist die Summe endlich.

Beweis der Substitutionsregel. Für $\varepsilon > 0$ setze $f_\varepsilon(y) := \sum\limits_{p\in\mathbb{Z}^n} f(p\varepsilon) Z_\varepsilon(y - p\varepsilon)$
Lemma 7 $\Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon = f$ gleichmäßig

$$\operatorname{supp} f_\varepsilon \subseteq L' \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon' \quad \text{(nach Def)}$$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}}$ mit $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ vertauschbar(vgl. Analysis I für 1 Veränderliche und §8 für das Lebesque-Integral)

$$\text{Also} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_V f_\varepsilon(y)\mathrm{d}y = \int_V f(y)\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned} \text{Setze} \quad g(x) &:= f(\varphi(x)) \cdot \left| \det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x) \right| \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \\ g_\varepsilon(x) &:= f_\varepsilon(\varphi(x)) \cdot \left| \det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \right| \end{aligned}$$

Lemma 7 $\Rightarrow g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\searrow 0}$ gleichmäßig

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_U g_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = \int_U g(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{Sei } \Delta_\varepsilon := \int_U g_\varepsilon(x)\mathrm{d}x - \int_V f_\varepsilon(y)\mathrm{d}y$$

genügt zu zeigen: $\lim_{\varepsilon\searrow 0} \Delta_\varepsilon = 0$ (*)

$$\text{denn dann ist } \int_U f(\varphi(x)) \left| \det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \right| \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_U g_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_V f_\varepsilon(y)\mathrm{d}y = \int_V f(y)\mathrm{d}y$$

□

Beweis von (*). Setze $A_{p\varepsilon} := \int_U Z_\varepsilon(\varphi(x) - p\varepsilon) \left|\det \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)\right| \mathrm{d}x - \int_V Z_\varepsilon(y - p\varepsilon)\mathrm{d}y$

$$\Rightarrow \Delta_\varepsilon = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f(p\varepsilon)A_{p\varepsilon}$$

$$\text{Lemma 5} \Rightarrow |A_{p\varepsilon}| \leq \Psi_1(\varepsilon)\cdot\varepsilon^n$$

L kompakt $\Rightarrow L$ enthalten in achsenparallelen Würfel der Seitenlänge s um 0.

$\Rightarrow |p|\varepsilon \leq \frac{s}{2}$ falls der Summand in Δ_ε vom Index $p \neq 0$ ist

$\Rightarrow$Anzahl der von 0 verschiedenen Summanden in Δ_ε ist $\leq \left(\frac{s}{\varepsilon}+1\right)^n$

$$\text{Sei} \quad M := \sup_{y\in V}|f(y)| \quad (< \infty)$$

$$\begin{aligned}
|A_\varepsilon| &\leq \sum_{p\in\mathbb{Z}^n}|f(p\varepsilon)||A_{p\varepsilon} \leq \left(\frac{s}{\varepsilon}\cdot M\cdot\Psi_1(\varepsilon)\cdot\varepsilon^n\right)\\
&= (s+\varepsilon)^n\cdot M\cdot\Psi_1(\varepsilon)\to 0 \quad \text{für}\varepsilon\to 0
\end{aligned}$$

□

Beweis von Lemma 7. f hat kompakten Träger $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig.

$$\forall\alpha > 0\exists\delta > 0 \quad \text{so dass} \quad |f(x) - f'(x)| < \alpha \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n\text{mit } ||x - x'|| < \delta$$

$$\text{sei } \varepsilon_0 := \frac{\delta}{\sqrt{n}} \qquad \text{sei } \Delta(x) := f(x) - \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f(p\varepsilon)Z_\varepsilon(x - p\varepsilon)$$

$$\text{zu zeigen: } \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ ist } |\Delta(x)| < \alpha \quad \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

$$\text{B: } \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} Z_\varepsilon(x - p\varepsilon) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} Z\left(\frac{x-p\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} Z\left(\frac{x}{\varepsilon} - p\right) \overset{L.6}{=} 1$$

$$\Rightarrow \Delta(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n}(f(x) - f(p\varepsilon))Z_\varepsilon(x - p\varepsilon)$$

Für x fest sei $M_x := \{p \in \mathbb{Z}^n \mid x \in \operatorname{supp}(Z_\varepsilon(\cdot - p\varepsilon))\}$

$\forall p \in M_x$ ist $\left|\frac{x-p\varepsilon}{\varepsilon}\right| \leq 1$ (Maximumsnorm)

$$\begin{aligned}
&\equiv \quad \left|\left|\frac{x-p\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right| \leq \sqrt{n}\left|\frac{x-p\varepsilon}{\varepsilon}\right| \leq \sqrt{n}\\
&\equiv \quad ||x - p\varepsilon|| \leq \varepsilon\sqrt{n} \leq \varepsilon_0\sqrt{n} = \delta\\
&\Rightarrow \quad |f(x) - f(p\varepsilon)| \leq \alpha\\
&\Rightarrow \quad \Delta(x) \leq \sum_{p\in M}|f(x) - f(p\varepsilon)|Z_\varepsilon(x - p\varepsilon) \leq \alpha\cdot\underbrace{\sum_{p\in M} Z_\varepsilon(x - p\varepsilon)}_{=1} = \alpha
\end{aligned}$$

□