

1 Fehleranalyse

Gleitkommazahlen

$$x = \sigma \left(\sum_{i=1}^t x_i d^{-i} \right) d^e$$

$t \in \mathbb{N}$, t = Mantissenlänge, e = Exponent, $\sigma = \pm 1$

Rundung

t = Stelle nach der gerundet wird.

$$|x - rd_t(x)| = \min_{y \in \mathbb{F}} |x - y|$$

Absoluter Fehler:

$$|x - rd_t(x)| \leq \frac{1}{2} d^{e-d}$$

Relativer Fehler (eps = Maschinengenauigkeit):

$$\left| \frac{x - rd_t(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{2} d^{1-t} = eps$$

Allgemeines über Räume

Norm

$$\|u\| \geq 0 \text{ und } \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$$

$\mathbb{L}(x, y)$ linearer Raum,

$$\|T\|_{\mathbb{L}(x, y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_y}{\|x\|}$$

$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ sind äquivalent wenn $\exists c, C \geq 0$ s.d

$$c\|x\|_1 < \|x\|_2 < C\|x\|_1$$

Banachraum

\Leftrightarrow Metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

Skalarprodukt

$(u, v, w \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lambda \in \mathbb{R})$

$$\langle \lambda u + v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$\langle u, v \rangle \geq 0$$

$X = C([a, b]), u, v \in X \Rightarrow \langle u, v \rangle := \int_a^b u(x)v(x)dx$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

(Prä)Hilbertraum

$(X, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ = Prähilbertraum,

falls X vollständig bezüglich $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ist $\Rightarrow X$ ist Hilbertraum.

Kondition eines Problemes

Lipschitzstetig

$$L := \sup_{y \in U, y \neq x} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|_x} < \infty$$

Falls $L < 1 \Rightarrow$ die Funktion ist *Kontrahierend*.

$$\kappa_{abs} := \limsup_{\delta \rightarrow 0} L(\delta)$$

$$L_{rel} := \sup_{y \in U, y \neq x} \frac{\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}}{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}} = L \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} < \infty$$

$$\kappa_{rel} := \limsup_{\delta \rightarrow 0} L_{rel}(\delta)$$

Komponentenweise Konditionsanalyse

Die Komponentenweise Kondition von $(f : x \in U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m)$ ist die kleinste Zahl κ_{rel} , s.d.:

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|_\infty}{\|f(x)\|_\infty} \leq \kappa_{rel} \max_i \left(\frac{|x_i - y_i|}{|x_i|} \right)$$

Für $y \rightarrow x, x_i \neq 0 \forall i_1, \dots, n$

Stabilität

Der Stabilitätsfaktor $\sigma \geq 0$ ist die kleinste Zahl mit: ($\epsilon \rightarrow 0 \forall \tilde{x} \in E$)

$$\frac{\|\tilde{f}(\tilde{x}) - f(\tilde{x})\|}{\|f(x)\|} \leq \sigma \kappa_{rel} \epsilon$$

$$\sigma \kappa \leq 1$$

Funktion $f = f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_1$

$$\sigma_f \cdot \kappa_f \leq \sigma_{f_k} \cdot \kappa_{f_k} + \sigma_{f_{k-1}} \cdot \kappa_{f_k} \cdot \kappa_{f_{k-1}} + \dots + \sigma_{f_1} \cdot \kappa_{f_1} \cdot \dots \cdot \kappa_{f_k}$$

$$\kappa_{f_k} \leq \kappa_{f_1} \cdot \dots \cdot \kappa_{f_k}$$

2 Nichtlineare GLS

Kontrahierende Funktionen

In einem Abgeschlossenen Raum, f stetig, $\exists!$ eine Fixpunkt x^* , s.d.:

$$x^* - f(x^*) = \phi(x^*)$$

Fehlerabschätzung:

$$\|x^* - x_{n+1}\| \leq L \|x^* - x_n\|$$

A priori Fehlerberechnung

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$$

A posteriori Fehlerberechnung

$$\|x^* - x_{n+1}\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_{n+1} - x_n\|$$

Dämpfung

Sei $f \in C^1(I) \subseteq \mathbb{R}$ Intervall mit Nullstelle $x^* \in I$. Dann existiert ein $w \in \mathbb{R}$ *Dämpfungsquator*, so dass die Fixpunktiteration ($X_0 \in I$)

$$x_{k+1} := x_k - w f(x_k)$$

lokal gegen x^* konvergiert. wobei ($f'(x^*) \neq 0$):

$$w = \frac{1}{f'(x^*)}$$

Newton-Verfahren

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht: $x^* \in I$ mit $f(x^*) = 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} := \phi(x_k)$$

Variante

Ersetze $DF(x_k)$ durch differenzenquotienten:

$$\frac{\partial f_i}{\partial (x_i)}(x_k) \approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x_k + h e_i) - f_i(x_k)}{2h}$$

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $x^* \in D$, $f \in C^2(D)$, $DF(x^*) \in GL_d$

i) x^* einzige Nullstelle von $f \in B_\varphi(x^*)$

ii) Für jeden Startwert $x_0 \in B_\varphi(x^*)$ konvergiert das Newtonverfahren gegen x^* .

iii) Für jeden Startwert $x_0 \in B_\varphi(x^*)$ konvergiert das Newtonverfahren *quadratisch*.

Satz

$D \subseteq \mathbb{R}^d$, $F : D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $F \in C^1(D, \mathbb{R}^d)$

existiert eine Nullstelle in D .

$\forall x \in D$, $v \in \mathbb{R}^d$, $s \in [0, 1]$ mit $x_s = x + s \cdot v$, $w \geq 0$

$$\|(DF^{-1}(DF(x_s) - DF(x)) \cdot v)\| \leq s \cdot w \cdot \|v\|^2$$

$x_0 \in B_\varphi(x^*) \subseteq D$ mit $0 < \varphi < \frac{2}{w}$

$$\|x^* - x_{k+1}\| \leq \frac{w}{2} \|x^* - x_k\|^2$$

3 Interpolation

Allgemeines

$f \in C([a, b])$, $\sigma := \{x_i | x_i \text{ paarweise verschieden } x_i \in [a, b], i = 1, \dots, n\}$

$h_\Sigma := \max_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i)$

$U_\Sigma \subseteq C([a, b])$ endlich. dim. VR.

$\dim U_\Sigma = n + 1$

Polynominterpolation

$U_\Sigma := \mathbb{P}_n =$ Der Raum der Polynome $\leq n$ -ten grades.

$p_\Sigma(x_i) = f_i \forall i = 1, \dots, n$

Lagrange Darstellung

$$p_\Sigma(x_k) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot L_i(x_k)$$

wobei:

$$\Sigma = \{x_0, \dots, x_n\}, \quad L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Nachteil der Lagrange Darstellung: Bei hinzufügung eines neuen Knotens, müssen alle L's neu berechnet werden.

Newtonsches Interpolationspolynom

$$\sum_{i=0}^n f[x_i, \dots, x_0] \cdot \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

wobei:

$$f[x_m, x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_0] = \frac{f[[x_m, x_{m-2}, \dots, x_0] - f[x_{m-2}, x_{m-3}, \dots, x_0]]}{x_m - x_{m-1}}$$

Restgliedabschätzung

$\Sigma, x_i \in [a, b] \forall i = 0, \dots, n, f \in C^1([a, b]), p_\Sigma \in \mathbb{P} \Rightarrow$

Es existiert für jedes $x \in [a, b]$ ein ξ aus dem kleinsten Intervall, das alle x, x_0, \dots, x_n enthält.

$$f(x) - p_\Sigma(x) = \frac{w_\Sigma}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

wobei:

$$w_\Sigma(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \cdots & (x_0)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \cdots & (x_n)^n \end{bmatrix}$$

Spline Interpolation

Allgemeines

Ziel: Verbindung der Knotenpunkte mit polynomen m-ten Grades. $n = \# \text{der Knotenpunkte}$, $m = \text{grad des Splines}$

$$\mathbb{S}_{\Sigma}^m := \{v \in C^{m-1}([a, b]) \mid v|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbb{P}_m\}$$
$$\dim \mathbb{S}_{\Sigma}^m = m + n$$

Weitere Anforderungen:

- i) $s'_{\Sigma}(a) = f'(a)$; $s'_{\Sigma}(b) = f'(b)$
- ii) $s''_{\Sigma}(a) = s''_{\Sigma}(b) =$
- iii) f periodisch mit perioden $l = b - a$, d.h:

$$s_{\Sigma}(a) = s_{\Sigma}(b)$$

$$s'_{\Sigma}(a) = s'_{\Sigma}(b)$$

$$s''_{\Sigma}(a) = s''_{\Sigma}(b)$$

Krümmung

Krümmung einer Funktion $v \in C^2([a, b])$

$$\psi = -\frac{v''}{\sqrt{1 + |v'|}}$$

Kubische Splines

f, Σ gegeben d.h. es $\exists!$

$$s_{\Sigma}(x) = a_k + b_k \cdot x + c_k \cdot x^2 + d_k \cdot x^3$$

mit der Gestalt:

$$a_k = f(x_k)$$

$$b_{k+1} = b_k + \frac{1}{2}(c_{k+1} + c_k) \cdot h_{k+1}$$

$$c_k = s''_{\Sigma}(x_k)$$

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{h_{k+1}}$$

wobei:

$$h_{k+1} = x_{k+1} - x_k, \quad b_0 = f'(a)$$

Problem: Berechnung von $s''_{\Sigma}(x_k)$

Fehlerabsätzung

$$g \in C^2([a, b]), \quad p_{\Sigma} \in S_{\Sigma}^1, \quad h_{\Sigma} = \max_i h_i$$

$$\|g - p_{\Sigma}\|_{\infty} \leq \frac{h_{\Sigma}^2}{8} \|g''\|_{\infty}$$

$f \in C^4([a, b])$, S_{Σ} Spline Interpolationsoperator

$$\|f - S_{\Sigma}f\|_{\infty} \leq \frac{h_{\Sigma}^4}{16} \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

$$\|(f - S_{\Sigma}f)''\|_{\infty} \leq \frac{h_{\Sigma}^2}{2} \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

(Orthogonale) Projektion

P heißt *Projektion* falls

$$P^2 = P \circ P = P$$

oder

$$Px = x \quad \forall x \in \text{img}(p)$$

d.h.: $\|p\| = 0$ oder 1 P orthogonal genau dann wenn:

P Projektion und $\|x - Px\| \leq \|x - Py\| \quad \forall y \in X$

$$\langle x - Px, Py \rangle = 0$$

In einem Endlichen Unterraum U eines Hilbertraumes $X \exists!$

$P : \rightarrow U$ mit $\text{img}(P) = U$

Massematrix

.... äquivalent zu $Mu = \Gamma$ mit:

$\varphi_0, \dots, \varphi_n$ Basis der \mathfrak{H}_Σ^1

$u = (u_0, \dots, u_n)$ wobei $p(f'') = \sum_{j=0}^n u_j \varphi_j$

$\Gamma = (\langle f'', \varphi_0 \rangle, \dots, \langle f'', \varphi_n \rangle)$

$M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ und $M_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$, M ist s.p.d..

geeignete wahl von φ_i :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ik}$$

Vereinfachungen für berechnung des $s_\Sigma(x) = a_k + b_k \cdot x + c_k \cdot x^2 + d_k \cdot x^3$:

$$c_i = u_i$$

$$\langle f'', \varphi \rangle = (h_i + h_{i+1}) \cdot f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$$

$$M = \text{diag} \frac{(h_i + h_{i+1})}{6} \begin{pmatrix} 2 & \lambda_0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \lambda_{n-1} & \\ & & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix}$$

wobei:

$$\lambda_i := \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \quad \mu_i := \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$$

4 Approximation

Meßwerte: $(t_1, y_1), \dots, (t_m, y_m)$ unterliegen einer Gëstzmäufigkeit:

$$z = \varphi(t, x_1, \dots, x_n) \\ y_i \approx z_i = \varphi(t_i, x_i, \dots, x_n)$$

bei gegeben $\varphi(t_i, x_i, \dots, x_n)$ und Datensätzen $(t_1, y_1), \dots, (t_m, y_m)$:
 $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(t_1, x) \\ \vdots \\ \varphi(t_m, x) \end{pmatrix} \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T$$

bestimme ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass:

$$\|\phi(x^*) - y\| \leq \|\phi(x) - y\|$$

wichtiger spezialfall: die p=2 norm.

Gewichtung

Falls für den Meßfehler eine Sätzung vorliegt:

$|y_i - \text{exakter Wert}| \approx \delta_i$

$$\|y\| := \left(\sum_{i=1}^m \left| \frac{y_i}{\delta_i} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

lineare Ausgleichsprobleme

$$\varphi(t, x) = \sum_{j=1}^n n a_j(t) x_j$$

Ausgleichsrechnung im Hilbertraum

$x^* \in \mathbb{R}^n \quad y = (y_1, \dots, y_m)^T$,

$$A = \begin{bmatrix} a_1(t_1) & \dots & a_n(t_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_1(t_m) & \dots & a_n(t_m) \end{bmatrix}$$

so dass:

$$\|Ax^* - y\| \leq \|Ax - y\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Householder Reflektion

$$Q^T A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q := \mathbf{1}_n - 2 \frac{v \cdot v^T}{\|v\|^2}$$

5 Numerische Quadratur

Numerische Berechnung von Intergralen.

$\Sigma =$ Zerlagung von $[a, b]$, $h = b - a$

$$I_\Sigma := h \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

Integrationsformel von Newton-Cotes

$\Sigma := \{a + \frac{ih}{n}, i = 0, \dots, n\}$, $f \in C([a, b])$, $P_{\Sigma, f} \in \mathbb{P}_k$ die Polynominterpolation.

$$I_{\Sigma}f := I(P_{\Sigma}, f) := \int_a^b P_{\Sigma}, f(x)dx$$

Sei nun $x = a + \frac{hs}{n}$, $s \in [0, n]$ $L_i(x) = Q_i(s) = \prod_{j=0, j \neq i}^n n \frac{s-j}{i-j}$

$$\int_a^b L_i(x)dx = \frac{h}{n} Q_i(s)ds$$

positiver Typ

Eine Quadraturformel $I_{\Sigma}f = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$ heißt vom *positiven Typ*, wenn $\alpha_i > 0$

Zusammengesetzte Newton Cotes Formel

$$I_{\Sigma}f = \sum_{k=0}^{m-1} I_{\sigma_k}f$$

$$I_{\sigma_k}f = \sum_{j=0}^n \omega_j h_k f(z_{kj})$$

Gauß Quadratur

kommt noch

6 Algorithmen

Rückwertsusbstittuion

Löst $Rx = z$ $\text{copm} \approx \frac{n^2}{2}$

R =obere- Δ 's-Matrix $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, x, z in \mathbb{R}^n

$$x(n) = \frac{z(n)}{r(n,n)}$$

for $i = (n-1) : -1 : 1$

$$x(i) = z(i)$$

for $j = i+1, n$

$$x(i) = x(i) - r(i, j) * x(j)$$

end

$$x(i) = \frac{x(i)}{r(i,i)}$$

end

Gausche Δ Zerlegung

$A = a_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $b \in \mathbb{R}^n$

for $k = 1 : 1 : n-1$

for $i = k+1 : 1 : n$

$$d = \frac{a(i,k)}{a(k,k)};$$

for $j = k+1 : 1 : n$

$$a(i, j) = a(i, j) - d * a(k, j);$$

end

$$b(i) = b(i) - d * b(k);$$

end

end

Gausche Δ Zerlegung mit pivot element suche

```
A = ai,j ∈ ℝn×n b ∈ ℝN
for i = 1 : 1 : n
  p(i)=i
end
for k = 1 : 1 : n - 1
  m=k;
  for i = k + 1 : 1 : n;
    if(|a(p(i),k)| ≥ |a(p(m),k)|)
      m = i;
    end
  end
end
h = p(m); p(m) = p(k); p(k) = h Zeilentausch
d = 1/a(p(i),k);
for i = k + 1 : 1 : n
  a(p(i),k) = a(p(i),k) * d;
  for j = k + 1 : 1 : n
    a(p(i),j) = a(p(i),j) - a(p(k),j) * a(p(i),k);
  end
  b(p(i)) = b(p(i)) - b(p(k));
end
```

Cholesky-Zerlegung

```
for k : 1 : n
  l(k,k) = √(a(n,n) - ∑j=1n-1 l2(n,j))    for i = k + 1 : 1 : n
  l(i,n) = (a(i,k) - ∑j=1k-1 l(i,j) * l(n,j)) * l(n,k);
end
end
```

Fixpunktiteration

```
I = [a, b], a < b f:I stetig
f(x*) = 0
f(a) * f(b) < 0
while(|xk+1 - yk+1| < ε)
  yk = a, xk = b
  z := (xk + yk) / 2
  if(f(z)=0)
    x* = z
  end
  else if(f(yk) * f(zk) < 0)
    yk+1 := yk; xk+1 := z
  end
  else
    yk+1 := z; xk+1 := xk
  end
end
```

Hornerschema

```
p(x) = β0 + x · β1 + ⋯ xn · βn
p:=β(n)
```

```

for  $i = n - 1 : 1 : 1$ 
   $p = p \cdot x + \beta(i)$ 
end

```

Dividierte Differenzen

```

for  $i = 0 : 1 : n$ 
   $T(i) = f(i)$ ;
  for  $k = i - 1 : -1 : 0$ 
     $T(k) = \frac{T(k+1) - T(k)}{x(i) - x(k)}$ ;
  end
   $A(i) = T(0)$ ;
end

```

Alg. von Neville

Polynom wird an der stelle x ausgewertet (knotenpunkte, f_i und x_i) sind bekannt. for $i = 0 : 1 : n$

```

 $p(i) = f(i)$ ;
for  $k = i - 1 : -1 : 0$ 
   $p(k) = p(k + 1) + (p(k + 1) - p(k)) \cdot \frac{(x - x(i))}{(x(i) - x(k))}$ 
end
end

```

QR-Verfahren

kommt noch